Esercizi sui limiti e sullo studio della continuità per funzioni di due variabili

1. Calcolare
$$L = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$$

2. $$L = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

3. $$L = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$$

4. $$L = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3\cos(x^2+y^3)}{x^2+y^2}$$

5. $$L = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{4x^2+y^4}$$

6. Calcolare, SE ESISTE, il limite
$$L = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^3+y^6}$$

7. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$
   per
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4}{x^2+y^2} & \text{se } xy \geq 0, \\[2ex] \dfrac{x}{x^2+3y^4} & \text{se } xy < 0. \end{cases}$$

8. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$
   per
$$f(x,y) = \begin{cases} e^y \ln(1+x^2) & \text{se } |y| \geq x^2, \\[2ex] \dfrac{x}{x^2+y^2} & \text{se } |y| < x^2. \end{cases}$$

9. Dimostrare che il limite
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^4+4y^4}$$
   NON ESISTE.

10. Dimostrare che il limite
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+2y^3}{x^2+y^2}$$
   NON ESISTE.

11. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \arctan\left(\frac{1}{x^2+2y^4}\right) \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$$

12.
$$\lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{\sin(y^3)}{y^2(x^2+y^2)}$$

13. Calcolare, se esiste,
$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\sin(x-1)-e^{x-1}+1}{(x-1)^2+y^2}$$

14. Dimostrare che
$$\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{(y-2)^4}{x^2+(y-2)^2} = 0$$

15. Dimostrare che
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^4}{x^2+y^2} = 0$$

16.
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3\sqrt{\frac{1}{2}-x^2-y^2}}{x^2+2y^2}$$

17.
$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{e^{2(x-1)^2}-1}{|x-1|+y^2}$$

18. Dimostrare che
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{|y|} = 0$$

19. Sia $g : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ data da
$$g(s) = \begin{cases} 7 & \text{se } 0 \le s \le 3, \\ 0 & \text{se } 3 < s \le 4, \\ 1 & \text{se } s > 4, \end{cases}$$
e si definisca $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ come
$$f(x,y) = g(x^2+y^2) \quad \text{per ogni } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$
Determinare l'insieme dei punti di discontinuità di f.

20. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da
$$f(x,y) = \begin{cases} 2x^2+1 & \text{se } y \ge 3x^2, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$
Per $\alpha \ge -1$, si denoti con r_α la retta di coefficiente angolare α passante per il punto $(-3,0)$. Determinare al variare di α il numero dei punti di discontinuità della <u>restrizione di f a r_α</u>.

21. Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la funz. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy^4)}{x^2+2y^2} & \text{se } (x,y) \ne (0,0), \\ \alpha & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
è continua su $\mathbb{R}^2$.

22. Determinare i punti in cui
$$f(x,y) = \begin{cases} 2(x^2+y^2) & \text{se } x^2+y^2 \le 1, \\ x+2y & \text{se } x^2+y^2 > 1 \end{cases}$$
è discontinua.