Esercizi sulle serie di funzioni

1. Sia $x \in [0, +\infty[$. Determinare l'insieme di convergenza puntuale della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{1 + x^{2n+1}}.$$

2. Determinare l'insieme di convergenza puntuale della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n+2) \frac{x^{n+2}}{(x+4)^n} \quad \text{per } x \in \mathbb{R} \setminus \{-4\}.$$

3. Verificare che la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan(nx) + 1}{n^4}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

è uniformemente convergente su $\mathbb{R}$.

4. Determinare l'insieme di convergenza puntuale di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{\sqrt[3]{n^8 + n^2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Sull'insieme di convergenza puntuale, la convergenza è uniforme?

5.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(n^2 x) \sin(3nx)}{\sqrt{n^3 + 7x^2}}, \quad x \in (0, +\infty)$$

Studiarne convergenza puntuale, e dimostrare che converge uniformemente sugli intervalli $[a, b]$ con $a > 0$.

6. Determinare $\alpha \in \mathbb{R}$ in modo che la serie

$$\sum_{n=7}^{\infty} \frac{7xe^{-nx^2}}{n^\alpha}$$

converga totalmente su $[0, +\infty)$.

7. Determinare l'insieme di convergenza puntuale della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n^4 + nx}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

La somma è una funzione continua? È derivabile?

8. Si calcoli $\int_0^{2\pi} f(x)\, dx$, dove f è il limite puntuale della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \sin^2(nx).$$

9. Sia

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - |x| \text{ se } |x| \le \frac{1}{2}\,, \\ 0 \text{ altrimenti}\,. \end{cases}$$

Discutere la convergenza puntuale e uniforme della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} g(x-n)$$

10. Insieme di convergenza puntuale di

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{x}{n^3}\right).$$

La funzione limite è continua?

11. Insieme di convergenza puntuale di

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \exp\left(-\frac{\sin^2(x)}{n^2}\right)\right)$$

La funzione limite f è continua, è derivabile? In caso affermativo, calcolare $f'(\pi/2)$.