Esercizi sulle serie di potenze

1. Determinare l'intervallo di convergenza di
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-1)^n}{4^n+1}$$
e studiare la convergenza negli estremi.

2. Determinare l'intervallo di convergenza di
$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n$$
e studiare la convergenza negli estremi.

3. Determinare l'intervallo di convergenza di
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)} x^n.$$
e studiare la convergenza negli estremi.

4. Data la serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{nx}}{n^2 n!}$$
provare che essa converge uniformemente su $(-\infty, a)$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.

5. Dimostrare che la serie
$$\sum_{n=7}^{+\infty} (-1)^n 2^{n/4} (n+7) (\sin x)^{n+1}$$
converge totalmente in $[0, \pi/8]$.

6. Calcolare la somma
$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln^n 10}{n!}.$$

7. Calcolare
$$S = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-1}$$
su $I = [-a, a]$ con $0 < a < 1$.

8. Calcolare
$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+2)n!} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

9. Calcolare
$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+2)n!} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

10. Si studi, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} (n!)^{\alpha} \frac{x^{2n+1}}{n(2n+1)}.$$

Nel caso $\alpha = 0$, si calcoli la sua funzione somma in un opportuno intorno di $x = 0$.

11. Calcolare la somma S della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{\pi/3}^{\pi/2} (-1)^{n+2} (\cos x)^{2n} \sin x \; \mathrm{d}x.$$

12. Calcolare la somma

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 - 1}{n!}.$$

13. Calcolare la somma di

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3(3x)^{4n+1}}{(2n)!(4n+1)}$$

14. Determinare x in modo che

$$\sum_{n=3}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n x^{n-2}}{n-2} = 2^2.$$

15.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{0}^{\pi/4} (-1)^n x^{2n} \arctan(x) \, \mathrm{d}x$$

16. Calcolare il coefficiente a_{20} dello sviluppo in serie di Taylor di

$$f(x) = e^{x^2}$$