Esercizi sugli studi qualitativi

Un risultato di prolungamento. Nelle ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale, se u è una soluzione del problema di Cauchy e $K \subset A$ un compatto tale che

$$\mathrm{graf}(u) \subset K,$$

allora il dominio di definizione di u non è massimale.

Il teorema del confronto. Siano u e v le soluzioni di

$$\begin{cases} u' = f(t, u(t)), \\ u(t_0) = y_0, \end{cases} \qquad \begin{cases} v' = g(t, v(t)), \\ v(t_0) = y_0, \end{cases}$$

con f e g soddisfacenti le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale. Supponiamo che

$$g(t, y) \geq f(t, y) \qquad \forall\, t \in I,\ y \in \mathbb{R}.$$

Allora

$$\begin{aligned} v(t) &\geq u(t) \quad \forall\, t \in I,\ t \geq t_0, \\ v(t) &\leq u(t) \quad \forall\, t \in I,\ t \leq t_0\,. \end{aligned}$$

---

1. Dimostrare che la soluz.
$$\begin{cases} y'(t) = \sin(t + y^2) \\ y(1) = 0 \end{cases}$$
esiste ed è unica, e che il suo dominio massimale di definizione è $\mathbb{R}$.

2. Studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ esist. locale per
$$\begin{cases} y' = \sqrt[3]{y - t} \\ y(1) = \alpha \end{cases}$$

3. Determinare l'intervallo massimale di definizione per le soluz. di
$$\begin{cases} y'(t) = t + \sqrt{y^2 + 2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{1}{t - 1} + \sqrt{y^2 + 2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

4. Verif. che la sol. di
$$\begin{cases} y' = (y + 1)^3 \sin(y) \\ y(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$
è limitata e strettamente crescente.

5. Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la monotonia di sol. di
$$\begin{cases} y' = \arctan(t) e^y (y - 1)(y - 2) \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

6. Dimostrare che la sol. di
$$\begin{cases} y' = -(y-3)\arctan(\log(y^2+1)) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$
è definita su tutto $\mathbb{R}$ e calcolare
$$\lim_{t\to-\infty} y(t) \quad \text{e} \quad \lim_{t\to+\infty} y(t).$$

7.
$$\begin{cases} y' = -(y-2)\arctan^2(y) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

8. Dato
$$\begin{cases} y' = e^{-y^2} + t^4 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$
(1) Dimostrare che esiste un'unica soluzione definita su tutto $\mathbb{R}$

(2) la soluzione $y(t)$ è dispari?

(3) Calcolare $\lim_{t\to+\infty} y(t)$.

9. Dato
$$\begin{cases} y'(t) = \arctan(t)\,(y(t) - \arctan(y(t))) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$
studiarne la soluzione al variare del dato $y_0 \in \mathbb{R}$.

10. Dato il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = \arctan(y) \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$
dimostrare che la soluzione

   (a) è definita su tutto $\mathbb{R}$

   (b) è strettamente monotona per $\alpha \neq 0$

   (c) è convessa se $\alpha > 0$, concava se $\alpha < 0$

   (d) calcolare
$$\lim_{t\to-\infty} y(t), \qquad \lim_{t\to+\infty} y(t)$$

11. Al variare di $0 < \alpha < 2\pi$ studiare la soluzione di
$$\begin{cases} y' = 2\sin(y) \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

12. Dimostrare che le soluzioni di
$$\begin{cases} y' = e^y \sin(y) \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$
sono definite su $\mathbb{R}$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

13. Dato il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = t\frac{4-y^2}{y} \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$
determinare al variare di $\alpha \neq 0$ se il problema ammette esistenza e unicità locale e globale. Studiare monotonia, eventuali simmetrie della soluzione, e i limiti agli estremi del dominio di definizione.

14. Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \log\left(\log^2(y) + \frac{1}{2}\right) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

con $y_0 > e^{-1/\sqrt{2}}$.

15. Dimostrare che il dominio massimale di definizione di

$$\begin{cases} y' = y^2 + t^2, \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

non è tutto $\mathbb{R}$.

16. Studiare

$$\begin{cases} y' = ye^{y^3} \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

17. Studiare

$$\begin{cases} y' = (e^y - 1)(y - 1) \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

18. Studiare

$$\begin{cases} y' = (1 - \exp(y^2))(y - 2)\tanh(y - 4)\arctan\left(y - \frac{1}{5}\right) \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

19. Studiare

$$\begin{cases} y' = \cosh\left(\frac{t^2}{6}\right) + y\arctan(2y) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$