Esercizi sulle successioni di funzioni

1. Stabilire l'insieme di convergenza puntuale e calcolare il limite di
$$f_n(x) = (\sin x)^n \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

2. Calcolare il limite puntuale di
$$f_n(x) = \frac{\arctan(nx)}{n} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$
Si ha convergenza uniforme?

3. Convergenza puntuale e uniforme di
$$f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

4. Convergenza puntuale e uniforme di
$$f_n(x) = \frac{\tanh(n^2 x)}{\sqrt{n}} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

5. Convergenza puntuale e uniforme di
$$f_n(x) = nxe^{-nx}$$
su $I = [0, +\infty[$.

6. Convergenza puntuale e uniforme di
$$f_n(x) = \sqrt{x + nx^2 \sin^2\left(\frac{1}{n(x+1)}\right)}.$$
su $[0, +\infty)$.

7. Convergenza puntuale e uniforme di
$$f_n(x) = 1 + n \sin\left(\frac{x \arctan(x) \ln(x^2+1)}{n^2}\right).$$
su $[0, +\infty)$.

8. Data la succ. di funz.
$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = 2x - \frac{x^n}{n} \;\forall\, x \in [0,1],$$
siano f il limite puntuale di $\{f_n\}_{n>0}$ e g il limite puntuale di $\{f'_n\}_{n>0}$:
   - studiare la convergenza uniforme di $\{f_n\}_{n>0}$ e $\{f'_n\}_{n>0}$ in $[0,1]$
   - Controllare se, in entrambi i casi, è verificata la tesi del teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale e commentare.

9. Sia data
$$f_n(x) = \frac{(\tan(x))^n}{\cos^2(x)} \quad \forall\, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$
   - studiare la convergenza puntuale e uniforme di $\{f_n\}_{n>0}$
   - discutere l'applicazione del teorema del passaggio al limite sotto il segno di integrale negli intervalli $[0, \frac{\pi}{6}]$ e $[0, \frac{\pi}{4}]$.

10. Sia
$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & x \in [0, n^2] \\ 0 & \text{se } x < 0 \\ n & \text{se } x > n^2. \end{cases}$$
Calcolare il limite puntale f di $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ su $\mathbb{R}$. La convergenza è uniforme? Discutere la convergenza uniforme sugli intervalli del tipo $[0, a]$ con $a > 0$.

11. Calcolare il limite puntuale di
$$f_n(x) = \frac{x}{x^2 + \frac{1}{n}}, \qquad x \in [0, +\infty).$$
Dimostrare che non si ha convergenza uniforme su $(0, +\infty)$, mentre si ha convergenza uniforme su $[a, +\infty)$ per ogni $a > 0$.

12. Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il limite puntuale e discutere la convergenza uniforme di
$$f_n(x) = n^\alpha \arctan \frac{x}{n^2} \chi_{]-n,n[}(x)\,.$$

13. Siano $f_n, g_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ due successioni di funzioni tali che
$$f_n \to f \quad \text{puntualmente}$$
e
$$g_n \to 0 \quad \text{uniformemente.}$$
Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.
   (a) $f_n + g_n \to f$ uniformemente.
   (b) $f_n g_n \to 0$ puntualmente.
   (c) $h_n = \frac{f_n^2}{f_n^2+1} g_n \to 0$ uniformemente.

14. Convergenza puntuale e uniforme di
$$f_n(x) = \sqrt[3]{x + \frac{4}{n}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

15. Convergenza puntuale e uniforme di
$$f_n(x) = \log\left(1 + n\left(\frac{x}{7}\right)^n\right)\left(\frac{x}{7}\right)^{n-1}, \qquad x \in [0, +\infty).$$