Esercizi sugli integrali tripli – formule di cambiamento di variabile

1. $$I = \iiint_T \sqrt{|z|}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$$

   ove T è la porzione di sfera (solida) nel primo ottante

   $$T = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x \geq 0,\; y \geq 0,\; z \geq 0,\; x^2+y^2+z^2 \leq 1\right\}.$$

2. $$I = \iiint_{T_+} z\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z,$$

   con

   $$T_+ = T \cap \{z \geq 0\} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; z \geq 0,\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\right\}$$

   con a, b, $c > 0$.

3. Calcolare il volume di T

   $$T = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq R^2\right\}$$

   con a, b, c, $R > 0$.

4. Calcolare il volume di

   $$T = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2+y^2+z^2 \leq y\right\}$$

5. $$I = \iiint_T \ln(x^2+y^2+z^2)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$$

   ove $T = B \cap C$, con

   $$B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2+y^2+z^2 \leq 1\right\} \quad \text{sfera unitaria}$$
   $$C = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2+y^2 \leq z^2,\; z \geq 0\right\}$$
   $$\text{porzione di cono solido nel semispazio } \{z \geq 0\}$$

6. $$I = \iiint_T (x^2+z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$$

   con

   $$T = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2+y^2 \leq z \leq 4\right\}.$$

7. $$I = \iiint_T \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$$

   ove T

   $$T = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; z^2 \leq x^2+y^2 \leq 2z - z^2\right\}.$$

8. $$I = \iiint_T z \sin(x^2+y^2)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$$

   con

   $$T = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; h \leq z \leq \sqrt{r^2-x^2-y^2}\right\}$$

9. Calcolare il volume di T delimitato dalla superficie cilindrica

$$\mathcal{S}: \ x^2 + y^2 - 2x = 0$$

e dai piani $y = 0$, $z = 0$ e $z = \sqrt{2}$, e situato nel primo ottante.

10.
$$\iiint_T x^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$$

con

$$T = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z \geq 0, \ x^2 + y^2 + 1 \leq z^2 \leq 4 \right\}$$