Estremi relativi (liberi) per campi scalari

Riccarda Rossi

Università di Brescia

Analisi Matematica B

Punti di estremo relativo (o locale)

Definizione

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *e sia* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *un campo scalare. Diciamo che* $x_0 \in \Omega$

1. *è un punto di* **minimo RELATIVO** *(o* **minimo LOCALE***) per* f *se esiste* $\varepsilon > 0$ *tale che*

$$\forall\, x \in B_\varepsilon(x_0) \cap \Omega \ : \ f(x_0) \leq f(x)$$

2. *è un punto di* **massimo RELATIVO** *(o* **massimo LOCALE***) per* f *se esiste* $\varepsilon > 0$ *tale che*

$$\forall\, x \in B_\varepsilon(x_0) \cap \Omega \ : \ f(x_0) \geq f(x)$$

Se vale 1 *o* 2*, si dice che* x_0 *è un punto di* **estremo relativo** *o di* **estremo locale***.*

Si dice **punto di estremo**....

Una definizione equivalente

Punti di estremo assoluto (o globale)

Definizione

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *e sia* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *un campo scalare. Diciamo che* $x_0 \in \Omega$

1. *è un punto di* **minimo ASSOLUTO** *(o* **minimo GLOBALE***) per* f

$$\forall\, x \in \Omega \ : \ f(x_0) \leq f(x)$$

2. *è un punto di* **massimo ASSOLUTO** *(o* **massimo GLOBALE***) per* f

$$\forall\, x \in \Omega \ : \ f(x_0) \geq f(x)$$

Se vale 1 *o* 2*, si dice che* x_0 *è un punto di* **estremo assoluto** *o di* **estremo globale***.*

Ogni punto di estremo assoluto è anche di estremo relativo

Cosa faremo:

Dati

$$f : \Omega \to \mathbb{R}, \quad x_0 \in \Omega, \quad f \text{ differenziabile in } x_0$$

daremo

- condizioni **necessarie**, al prim'ordine, affinché x_0 sia un punto di estremo RELATIVO

- condizioni **sufficienti**, al second'ordine, affinché x_0 sia un punto di estremo RELATIVO

Estremi locali e punti critici

Teorema (Teorema di Fermat (Condizione necessaria))

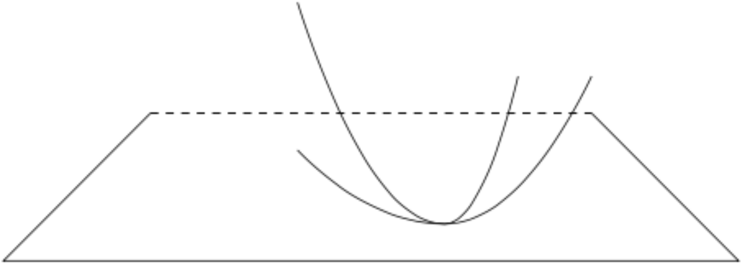
Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *un aperto e sia* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *un campo scalare. Sia* x_0 *un punto di estremo relativo per* f*. Se* f *è differenziabile in* x_0 *allora*

$$\forall\, v \in \mathbb{R}^n \ : \|v\| = 1 \ : \ D_v f(x_0) = 0.$$

In particolare $\nabla f(x_0) = 0$*.*

Confronto con funzioni di una variabile

Significato geometrico del teorema di Fermat



Dimostrazione

■ Notiamo che l'ipotesi che f sia differenziabile non può essere omessa. Infatti, il punto $t = 0$ è un punto di massimo per la funzione

$$f : [-1, 1] \to \mathbb{R}, \qquad f(t) = 1 - |t|,$$

ma $f'(0)$ non esiste.

Esempi

Definizione (Punti critici)

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ un campo scalare. Diciamo che $x_0 \in \Omega$ è un punto **STAZIONARIO** *(o* **CRITICO***) di f se f è differenziabile in x_0 e se $\nabla f(x_0) = 0$.*

- Quindi in un punto critico x_0

- Se Ω è aperto e f è differenziabile in Ω, i punti di estremo relativo vanno ricercati fra i punti stazionari, ma non tutti i punti stazionari sono di estremo.

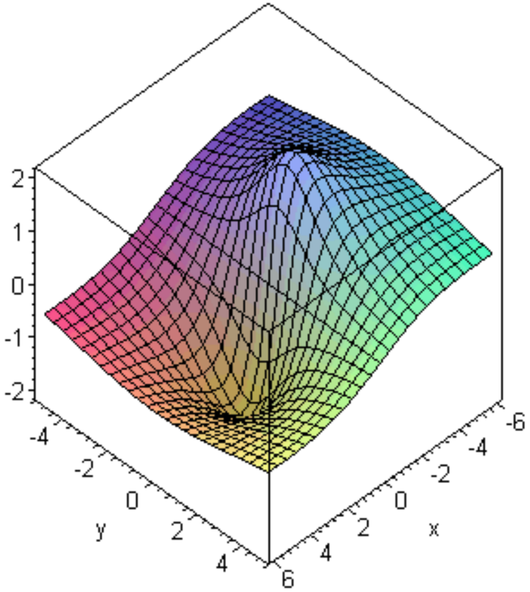
Definizione (Punti di sella)

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *un aperto. Sia* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *un campo scalare e sia* $x_0 \in \Omega$ *un punto stazionario di* f*. Diciamo che* x_0 *è un punto di* **sella** *di* f *se* x_0 *non è né un minimo locale né un massimo locale.*

Daremo condizioni al second'ordine che ci permetteranno di classificare i punti stazionari e cioè stabilire se sono punti di

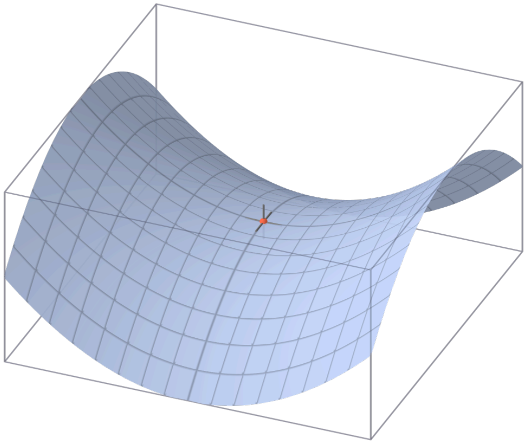
- massimo relativo
- minimo relativo
- sella

Minimo e massimo locale



Punto di sella

Punto di sella



Condizioni al second'ordine per funzioni di una variabile..

Richiami di algebra lineare

Matrice hessiana

Definizione (Matrice hessiana)

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto. Supponiamo che in $x \in \Omega$ esistano tutte le derivate seconde di f. Chiamiamo **matrice hessiana** *di f nel punto x la matrice $H_f(x)$ di n righe e n colonne tale che*

$$(H_f(x))_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x).$$

- Sia $\boxed{f \in C^2(\Omega)}$. Segue dal Lemma di Schwarz che la matrice hessiana è simmetrica:

$$(H_f(x))_{ij} = (H_f(x))_{ji}$$

e quindi **tutti i suoi autovalori sono numeri reali**.

- e quindi nel caso $n = 2$

Esempio

Consideriamo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *data da*

$$f(x, y) = x^3 + 2y^2 + x^2 y + 6$$

Teorema (**Test della matrice hessiana**)

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $x_0 \in \Omega$ un punto critico di $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Supponiamo inoltre che esista un intorno $U \subseteq \Omega$ di x_0 tale che $f \in C^2(U)$. Valgono le seguenti affermazioni:

1. *Se tutti gli autovalori di $H_f(x_0)$ sono positivi, allora x_0 è un punto di minimo locale.*
2. *Se tutti gli autovalori di $H_f(x_0)$ sono negativi, allora x_0 è un punto di massimo locale.*
3. *Se $H_f(x_0)$ ha almeno un autovalore positivo e un autovalore negativo, allora x_0 è un punto di sella.*
4. *Se zero è un autovalore di $H_f(x_0)$ e tutti gli altri autovalori hanno lo stesso segno, allora il test è inefficace.*

Corollario (**Test del determinante hessiano**)

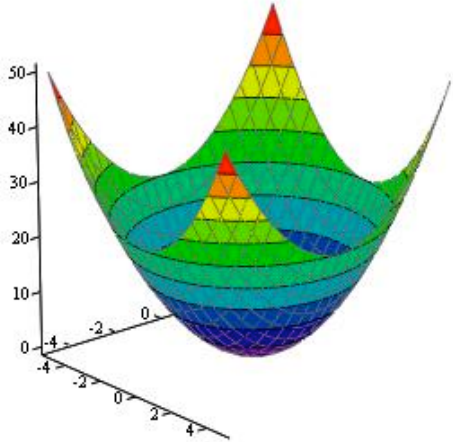
Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ *e sia* $(x_0, y_0) \in \Omega$ *un punto critico di* $f : \Omega \to \mathbb{R}$. *Supponiamo inoltre che esista un intorno* $U \subseteq \Omega$ *di* (x_0, y_0) *tale che* $f \in C^2(U)$. *Valgono le seguenti affermazioni:*

1. *Se* $\det H_f(x_0, y_0) > 0$ *e* $\partial^2_{xx} f(x_0, y_0) > 0$, *allora* (x_0, y_0) *è un punto di minimo locale.*
2. *Se* $\det H_f(x_0, y_0) > 0$ *e* $\partial^2_{xx} f(x_0, y_0) < 0$, *allora* (x_0, y_0) *è un punto di massimo locale.*
3. *Se* $\det H_f(x_0, y_0) < 0$, *allora* (x_0, y_0) *è un punto di sella.*
4. *Se* $\det H_f(x_0, y_0) = 0$ *il test è inefficace.*

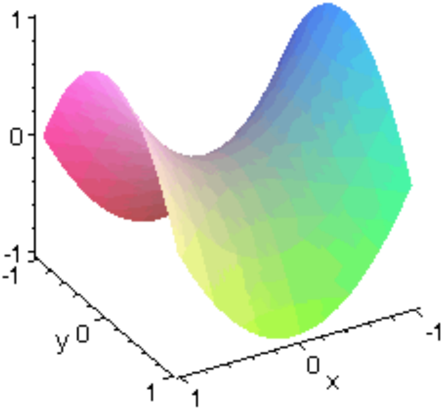
Dimostrazione

Esempi

$$\boxed{f(x,y) = x^2 + 2y^2 + 3}$$


50
40
30
20
10
0
-4
-2
0
-4
-2
0
2
4

$$\boxed{f(x,y) = xy}$$


1
0
-1
-1
y 0
1
1
0
x
-1

$$\boxed{f(x,y) = x^2 + y^3}$$