

Proprietà globali delle funzioni continue

Riccarda Rossi

Università di Brescia

Analisi I

Introduzione

Problema: stabilire legami fra

- continuità (proprietà di tipo *locale*) e
- proprietà *globali* delle funzioni

Daremo risultati teorici che combinano

1. la **continuità** di f con
2. ipotesi “**topologiche**” su $\text{dom}(f)$: richiederemo che

$$\text{dom}(f) = I,$$

I intervallo generico (anche semiretta aperta o chiusa
anche intervallo aperto
anche intervallo semiaperto
anche intervallo chiuso)

3. in casi specifici, richiederemo

$$I = [a, b] \text{ intervallo } \underline{\text{chiuso e limitato}}.$$

Definizione

Data $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$, chiamiamo

- ▶ $x_m \in D_f$ punto di minimo assoluto per f se

$$f(x_m) \leq f(x) \quad \forall x \in D_f,$$

e il corrispondente valore $f(x_m)$ viene detto *valore di minimo assoluto* per f ;

- ▶ $x_M \in D_f$ punto di massimo assoluto per f se

$$f(x_M) \geq f(x) \quad \forall x \in D_f,$$

e il corrispondente valore $f(x_M)$ viene detto *valore di massimo assoluto* per f .

Di fatto,

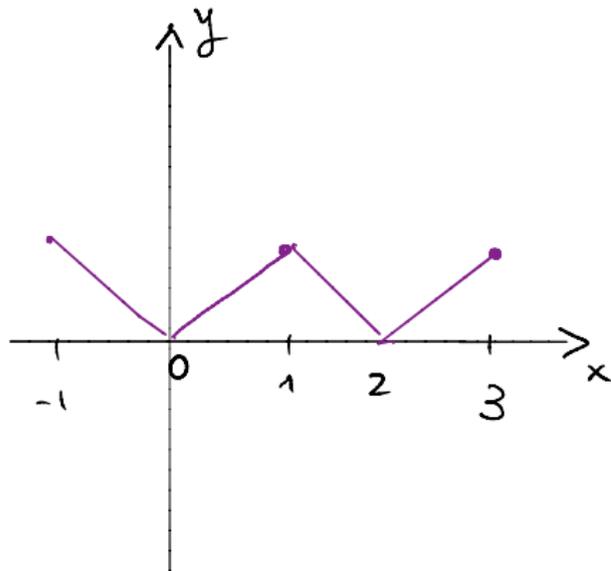
$$f(x_m) = \min\{f(x) : x \in D_f\} = \min \text{im}(f),$$

$$f(x_M) = \max\{f(x) : x \in D_f\} = \max \text{im}(f);$$

quindi chiameremo anche $m := f(x_m)$ e $M := f(x_M)$ minimo & massimo di f

Attenzione!!!! non confondere

- punto di massimo per f
- valore di massimo di f (si dice anche *massimo di f*)



$$W: [-1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$W(x) = \begin{cases} |x| & x \in [-1, 1] \\ |x-2| & x \in [1, 3] \end{cases}$$

• Il (valore di) minimo assoluto per W è

$$m = 0$$

2 pti di minimo assoluto

$$x_0 = 0 \quad \text{e} \quad x_1 = 2$$

• Il (valore di) massimo assoluto per W è $M = 1$

3 punti di massimo assoluto: $x_2 = -1, x_3 = 1, x_4 = 3$

Introduciamo anche

- ▶ l'*estremo superiore di f* , cioè l'estremo superiore dell'insieme immagine di f , ossia

$$\sup f = \sup \operatorname{im}(f) = \sup\{f(x) : x \in D_f\};$$

- ▶ l'*estremo inferiore di f* , cioè l'estremo inferiore dell'insieme immagine di f , ossia

$$\inf f = \inf \operatorname{im}(f) = \inf\{f(x) : x \in D_f\};$$

Ci chiediamo se una $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ammette sempre (in D_f) almeno un punto di minimo e almeno un punto di massimo assoluto.....

NO!!

Esempio 1

$$f(x) = e^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

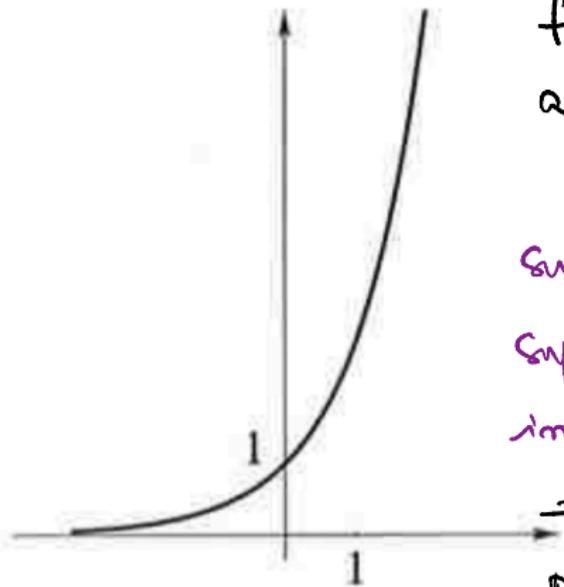
f ammette in \mathbb{R}
almeno un pto di MIN/
MAX ASS. ?

$$\sup(f) = \sup(\text{im}(f)) = +\infty$$

$$\sup(f) \notin \text{im}(f)$$

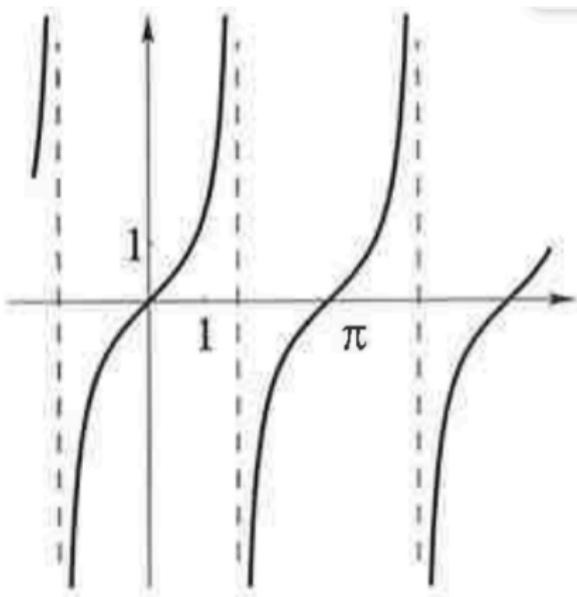
$$\inf(f) = 0 \notin \text{im}(f)$$

$\Rightarrow f$ non ha alcun
pto di MINIMO / MAX.
ASS.



Esempio 2

$$f(x) = \tan(x), \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$



$$\text{im}(f) = \mathbb{R}$$

\Downarrow

$$\sup(f) = +\infty$$

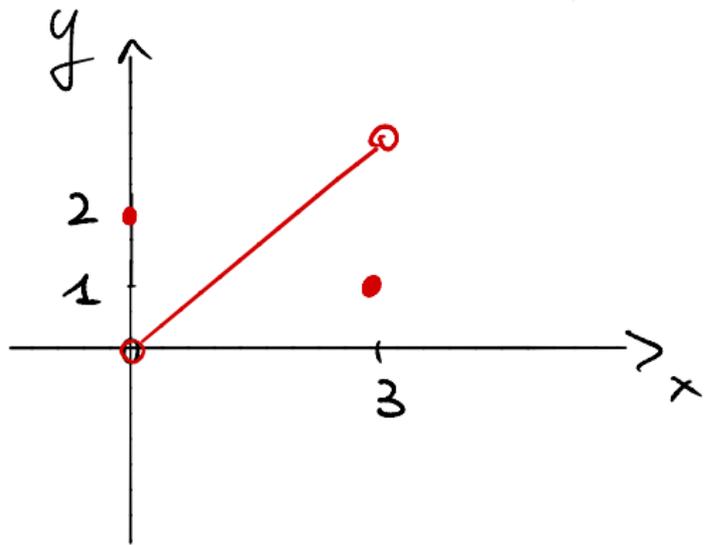
$$\inf(f) = -\infty$$

\Rightarrow f non ha
in Df "pti di"

ESTR. ASSOLUTO

Esempio 3

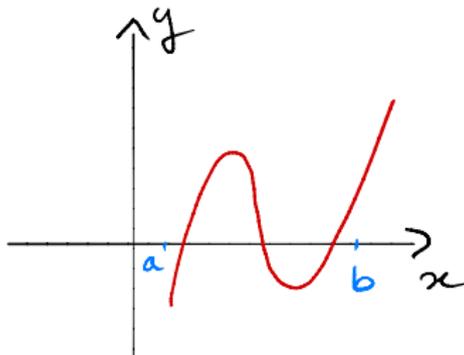
$$f(x) = \begin{cases} 2 & x = 0, \\ x & x \in (0, 3), \\ 1 & x = 3. \end{cases}$$



Teorema di Weierstrass

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ **continua** su $[a, b]$ intervallo chiuso e limitato. Allora f ammette almeno un punto di massimo e almeno un punto di minimo in $[a, b]$, cioè

$$\exists x_m, x_M \in [a, b] : \forall x \in [a, b] \quad f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M).$$



Dimostrazione: dimostreremo che

$\exists x_m \in [a, b]$ punto di minimo per f .

- ▶ **Passo 1:** Costruiamo una *successione minimizzante* per f su $[a, b]$, cioè tale che

$$f(x_n) \rightarrow \inf_{[a,b]} f.$$

- ▶ **Passo 2:** $\{x_n\} \subset [a, b]$ è limitata, quindi per il teorema di Bolzano Weiestrass

\exists una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$, $\exists x \in \mathbb{R} : \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$.

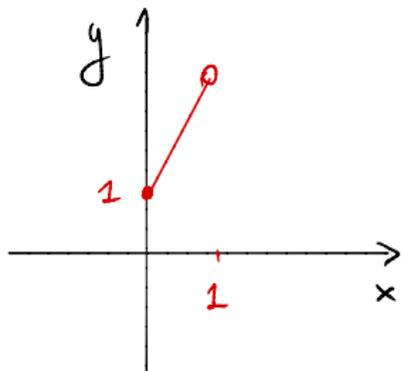
Notare che

$$a \leq x_{n_k} \leq b \Rightarrow a \leq x \leq b.$$

- ▶ **Passo 3:** Usiamo che f è continua:

Tutte le ipotesi del teorema sono fondamentali: se una di esse non è soddisfatta, la tesi è falsa.

1. Siano $I = [0, 1[$, $f(x) = 2x + 1$. f è continua su I , I è limitato **ma non è chiuso**.



Notare che

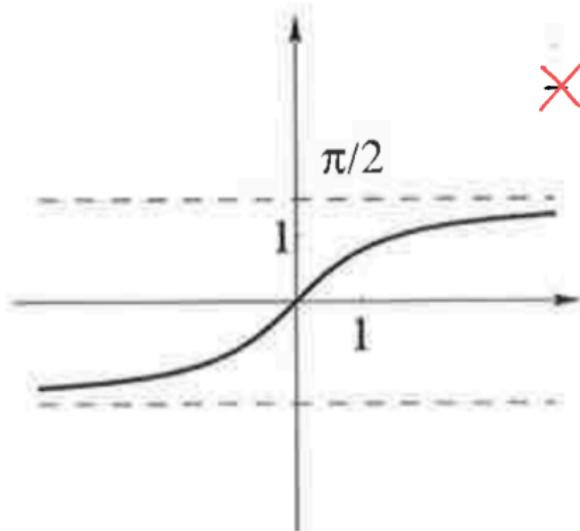
- ▶ f ammette invece minimo su I : è $x = 0$, $\min_I f = 1$,
- ▶ f non ammette massimo: si ha $\sup_I f = 3$, che non viene assunto in alcun punto di I .

2. Siano $I = \mathbb{R}$, $f(x) = \arctan(x)$.

✓ f è continua su D_f

✓ $D_f = I = \mathbb{R}$ è un intervallo

✗ I non è limitato



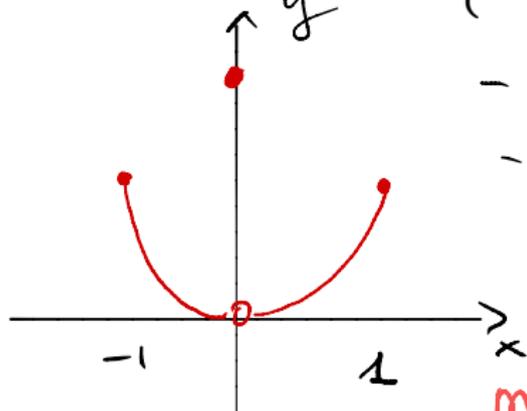
$$\sup(f) = \frac{\pi}{2} \notin \text{im}(f)$$

$$\inf(f) = -\frac{\pi}{2}$$

$\Rightarrow f$ non ha né
pti di MIN. ASS.
né pti di MASS. ASS.

3. Siano $I = [-1, 1]$ e $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{per } x \in [-1, 1] \setminus \{0\}, \\ 2 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$



- f ha in $x_0=0$ un pto di MASS. ASSOLU.
- f non ha pti di MIN. ASSOLU.

$\cdot \text{dom}(f) = [-1, 1]$ CHIUSO e LIMITATO

ma f non è cont. su tutto $[-1, 1]$

f **non** ha minimo, e $\inf f = 0$. $\max f = 2$ e 0 è l'unico punto di massimo.

Notare che $I = [-1, 1]$ è chiuso e limitato, ma f **non** è continua.

Corollario al teorema di Weierstrass

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$. Allora f è limitata.

Risultati sulla risolubilità di equazioni

Teorema di Bolzano o "degli zeri"

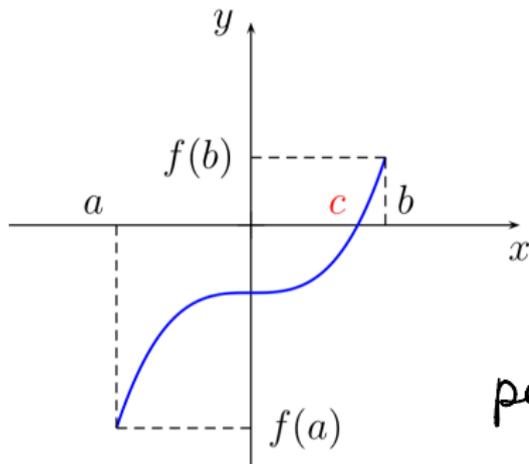
Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a, b]$ tale che

$$f(a)f(b) < 0.$$

Allora esiste almeno un punto

$$c \in]a, b[\text{ tale che } f(c) = 0.$$

*c viene
detto
"zero di f"*

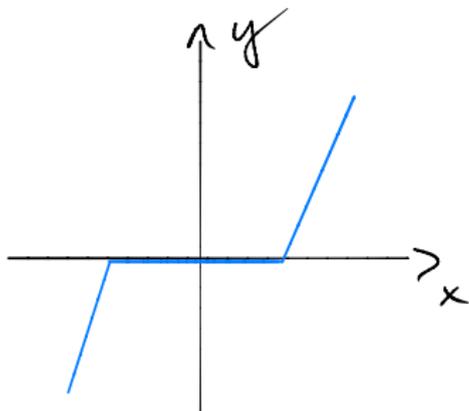
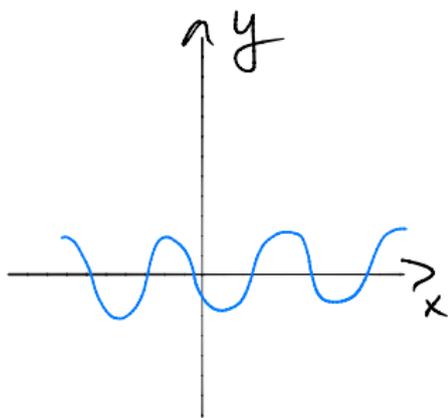
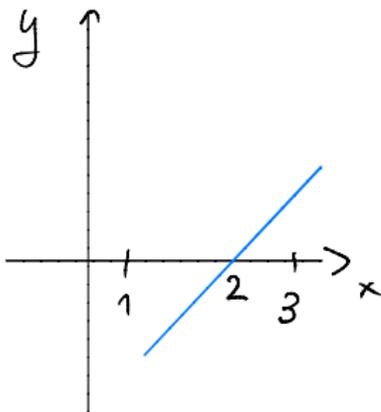


N.B. f assume
valori trascorsi
agli estremi di $]a, b[$

N.B. $c \in]a, b[$
perché $f(a) \neq 0$ e $f(b) \neq 0$

Osservazione:

Il teorema assicura che f ammette almeno uno zero c , non ci dice nulla sull'unicità di c . In generale, c non è unico!



Una conseguenza del teorema degli zeri

Tutte le ipotesi del Teorema degli zeri sono necessarie!

Il teorema dei valori intermedi

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a, b]$. Allora,

f assume tutti i valori compresi tra $\min_{x \in [a, b]} f(x)$ e $\max_{x \in [a, b]} f(x)$.

Corollario

Sia I intervallo e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continua in I . Allora $\text{im}(f)$ è un intervallo.

Funzioni continue invertibili

Sia

$f : A \rightarrow \mathbb{R}$ continua in A e iniettiva.

Allora f è invertibile, con funzione inversa

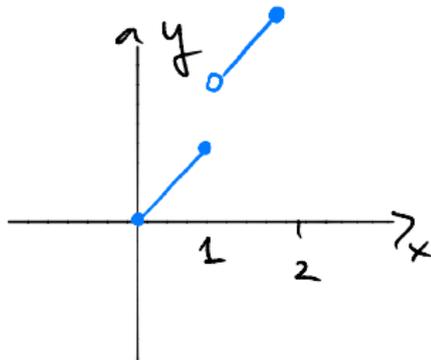
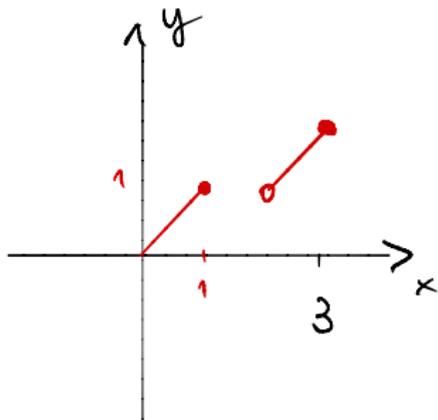
$$f^{-1} : \text{im}(f) \rightarrow \mathbb{R}.$$

- f^{-1} è continua in $\text{im}(f)$?

Esempio

Sia $A = [0, 1] \cup (2, 3]$ (unione di due intervalli) e sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0, 1] \\ x - 1 & \text{se } x \in (2, 3]. \end{cases}$$



Risultato I: caratterizzazione delle funzioni continue invertibili

Sia I un intervallo e sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua su I .
Allora

f è invertibile $\iff f$ è strettamente monotona.

- Se f è strettamente monotona, allora la funzione inversa $f^{-1} : J \rightarrow \mathbb{R}$ è ancora monotona, con una monotonia dello stesso tipo di f . $f^{-1} : J \rightarrow \mathbb{R}$ è anche continua?

Risultato II: continuità della funzione inversa

Siano

- ▶ I intervallo
- ▶ $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continua su I
- ▶ $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ invertibile

Allora $f^{-1} : \text{im}(f) \rightarrow \mathbb{R}$ è continua.