Integrali curvilinei

Università di Brescia

Analisi Matematica B

Verso di percorrenza

- In generale vale la seguente regola: se $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ è una curva e $r : [c, d] \to \mathbb{R}^n$ è una sua riparametrizzazione con $\varphi : [c, d] \to [a, b]$, cioè

$$r(s) = \gamma(\varphi(s)), \qquad s \in [c, d], \qquad \text{allora}$$

1. γ e r hanno lo **stesso** verso di percorrenza se $\varphi : [c, d] \to [a, b]$ è **crescente**, cioè r è una riparametrizzazione **concorde** di γ.
2. γ e r hanno i versi di percorrenza **opposti** se $\varphi : [c, d] \to [a, b]$ è **decrescente**, cioè r è una riparametrizzazione **discorde** di γ.

Esempio

Esempio

Integrali curvilinei per campi scalari

Definizione (Integrale curvilineo di un campo scalare)

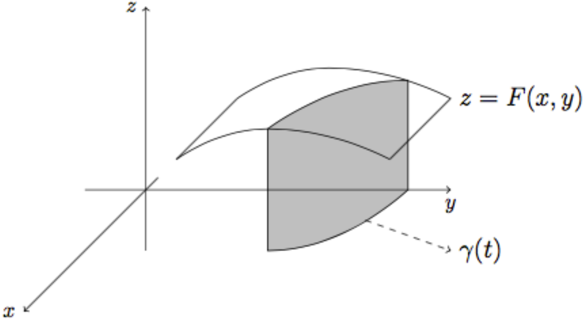
Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *un aperto e sia* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *un campo scalare continuo. Sia inoltre* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *una curva regolare a tratti tale che* $\gamma([a, b]) \subset \Omega$*. Chiamiamo* **integrale curvilineo di** f **lungo** γ *la quantità*

$$\int_\gamma f := \int_a^b f(\gamma(t))\, \|\gamma'(t)\|\, dt.$$

Osservazioni

- Per $f \equiv 1$ si ha
$$\int_\gamma f = L(\gamma).$$

Interpretazione geometrica



Applicazioni

Esempio

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *il campo scalare definito da*

$$f(x, y) = 2x^2 + xy + y^2,$$

e sia $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = (t, 2t) \qquad t \in [0, 1].$$

Esempio

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *il campo scalare definito da*

$$f(x, y) = \frac{y^2}{x^2 + y^2}$$

e sia $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \qquad t \in [0, \pi].$$

Dalla definizione dell'integrale curvilineo per campi scalari e dalle proprietà dell'integrale di Riemann segue

Teorema (Proprietà di integrali curvilinei per campi scalari)

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e siano $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ due funzioni continue. Sia inoltre $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una curva regolare a tratti tale che $\gamma([a, b]) \subset \Omega$. Valgono le seguenti proprietà:

1. *Linearità : per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*

$$\int_\gamma (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_\gamma f + \beta \int_\gamma g.$$

2. *Additività : se $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, allora*

$$\int_\gamma f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f$$

Teorema (**Invarianza per riparametrizzazione**)

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *un aperto e sia* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *un campo scalare continuo. Siano inoltre* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *una curva di classe* $C^1([a, b])$ *a valori in* Ω *e* $r : [c, d] \to \mathbb{R}^n$ *una riparametrizzazione di* γ*. Allora vale*

$$\int_\gamma f = \int_r f$$

Dimostrazione

Integrali curvilinei per campi vettoriali

Definizione (Integrale curvilineo di un campo vettoriale)

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *un aperto e sia* $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *un campo vettoriale continuo. Sia inoltre* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *una curva regolare a tratti tale che* $\gamma([a, b]) \subset \Omega$. *Chiamiamo* **integrale curvilineo di** F **lungo** γ *la quantità*

$$\int_\gamma F := \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt.$$

- Scrivendo $F(x) = (F_1(x), \dots, F_n(x))$ e $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$ si ha

$$\int_\gamma F \; = \; \int_a^b \sum_{j=1}^n F_j(\gamma(t)) \; \gamma_j'(t) \; dt$$

- Se γ è una curva chiusa, allora scriviamo

$$\oint_\gamma F$$

Esempio

Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *il campo vettoriale definito da*

$$F(x, y) = (xy, -y)$$

e sia $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ *la curva data da*

$$\gamma(t) = (t, t^2) \qquad t \in [0, 1].$$

Nel modo del tutto analogo al caso di campi scalari si ottiene

Teorema (Proprietà di integrali curvilinei per campi vettoriali)

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e siano $F, G : \Omega \to \mathbb{R}^n$ due campi vettoriali continui. Sia inoltre $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una curva regolare a tratti tale che $\gamma([a, b]) \subset \Omega$. Valgono le seguenti affermazioni:

1. *Linearità : per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*

$$\int_\gamma (\alpha F + \beta G) = \alpha \int_\gamma F + \beta \int_\gamma G.$$

2. *Additività : se $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, allora*

$$\int_\gamma F = \int_{\gamma_1} F + \int_{\gamma_2} F$$

Teorema (**Riparametrizzazione per integrali di campi vettoriali**)

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale continuo. Siano inoltre $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una curva di classe $C^1([a, b])$ a valori in Ω. Sia $r : [c, d] \to \mathbb{R}^n$ una riparametrizzazione di γ; cioè

$$r(s) = \gamma(\varphi(s)) \qquad s \in [c, d]$$

dove $\varphi : [c, d] \to [a, b]$ è una funzione biettiva derivabile .

1. *Se r è* **concorde** *di γ (φ è* **crescente***), allora*

$$\int_\gamma F = \int_r F.$$

2. *Se r è* **discorde** *di γ (φ è* **decrescente***), allora*

$$\int_\gamma F = -\int_r F.$$

Dimostrazione:

Esempi:

$$\int_\gamma F \quad \text{con} \begin{cases} F(x,y) = y^2\vec{i_1} + x\vec{i_2}, \\ \vec{r_1}(t) = t\vec{i_1} + t\vec{i_2}, \quad t \in [0,1] \end{cases}$$

$$\int_\gamma F \quad \text{con} \quad \begin{cases} F(x,y) = y^2\vec{i}_1 + x\vec{i}_2, \\ \vec{r}_2(t) = t\vec{i}_1 + t^2\vec{i}_2, \quad t \in [0,1] \end{cases}$$

$$\int_\gamma F \quad \text{con} \begin{cases} F(x,y) = y^2 \vec{i}_1 + x\vec{i}_2, \\ \vec{r}_3(t) = \sqrt{t}\,\vec{i}_1 + t\vec{i}_2, \quad t \in [0,1] \end{cases}$$

$$\int_\gamma F \quad \text{con} \quad \begin{cases} F(x,y) = y^2 \vec{i_1} + x\vec{i_2}, \\ \vec{r_4}(t) = (1-t)\vec{i_1} + (1-t)\vec{i_2}, \quad t \in [0,1] \end{cases}$$