Funzioni di più variabli: dominio, limiti, continuità

Riccarda Rossi

Università di Brescia

Analisi Matematica B

Domini

1. Funzioni (scalari) di due variabili

Consideriamo le seguenti funzioni di due variabili:

$$f_1(x, y) = 3x^2 + 2xy + 5$$

$$f_2(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

$$f_3(x, y) = \log(y - x^2)$$

Vogliamo determinare il **dominio** di queste funzioni, cioè il più grande insieme in cui le variabili x, y possono variare in modo tale che le espressioni analitiche per le funzioni f_1, f_2 e f_3 siano ben definite.

■ Quando considereremo le funzioni di due variabili, scriveremo, con un lieve abuso della notazione, (x, y) invece di (x_1, x_2).

- La funzione $f_1(x, y) = 3x^2 + 2xy + 5$ è ben definita per tutti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, per cui
$$\mathrm{Dom(f_1)} = \mathbb{R}^2.$$

- La radice quadrata nella definizione della funzione
$$f_2(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

può essere calcolata solo quando $4 - x^2 - y^2 \geq 0$, per cui si ha
$$\mathrm{Dom(f_2)} = \{\mathrm{x, y}) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 \leq 4\}.$$

Quindi $\mathrm{Dom(f_2)}$ è un insieme chiuso.

■ Per quanto riguarda la funzione $f_3(x, y) = \log(y - x^2)$, notiamo che il logaritmo può essere calcolato solo se $y - x^2 > 0$. Quindi

$$\mathrm{Dom(f_3)} = \{(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \mathbb{R}^2 \, : \, \mathrm{y} > \mathrm{x}^2\},$$

ed è un insieme aperto

- Se la funzione f è data nella forma della somma $f = g + h$, allora vale

$$\mathrm{Dom(f)} = \mathrm{Dom(g)} \cap \mathrm{Dom(h)}$$

Esempio

Consideriamo la funzione $f(x, y) = g(x, y) + h(x, y)$, *dove*

$$g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}, \qquad h(x, y) = \log(x^2 - y^2).$$

2. Domini di funzioni (scalari) di tre variabili

Esempio

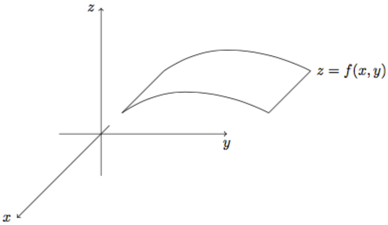
$$f(x,y,z) = \sin(x-y^2) + \arctan\left(\frac{z}{y}\right)$$

Grafici

Sia $f : \mathrm{Dom(f)} \to \mathbb{R}$, $\boxed{\mathrm{Dom(f)} \subset \mathbb{R}^2}$. Il grafico di f

$$\mathrm{Graf}(f) := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = f(x, y), \ (x, y) \in \mathrm{Dom(f)}\}$$

è una superficie in $\mathbb{R}^3$.



- Per funzioni di tre variabili, il grafico è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^4$.....

Campi scalari e campi vettoriali

Noi ci occuperemo di funzioni di tipo $f : \mathrm{Dom(f)} \to \mathbb{R}^{\mathrm{m}}$ con $\mathrm{Dom(f)} \subset \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ che spesso denoteremo con Ω.

- Nel caso $m = 1$, in cui $f : \mathrm{Dom(f)} \to \mathbb{R}$, diciamo che f è un campo **scalare**

- Nel caso $m > 1$ chiamiamo f campo **vettoriale**. Esempi......

Definizione (Insiemi di livello)

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ una funzione. Sia $c \in \mathbb{R}^m$. Chiamiamo l'insieme di livello della funzione f l'insieme

$$\Omega_c = \{x \in \Omega \, : \, f(x) = c\}.$$

Interpretazione geometrica delle curve di livello

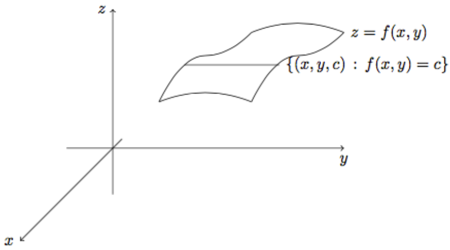
Sia $f : \Omega \to \boxed{\mathbb{R}}$, $\boxed{\Omega \subset \mathbb{R}^2}$ e quindi $f = f(x, y)$. Quindi

$$\Omega_c = \{(x, y) \in \Omega : \ f(x, y) = c\}.$$

Consideriamo l'insieme

$$\Omega_c \times \{c\} = \{(x, y, c) \in \mathbb{R}^3 : \ f(x, y) = c\}.$$

L'unione degli insiemi $\Omega_c \times \{c\}$ al variare di $c \in \mathbb{R}$ descrive $\mathrm{Graf}(f)$.



Esempio

Sia $f(x, y) = x^2 - y$. *Allora* $\mathrm{Dom(f)} = \mathbb{R}^2$ *e gli insiemi di livello sono le parabole date dall'equazione*

$$y = x^2 - c.$$

Esempio

Sia $f(x,y) = xy$. *Allora* $\mathrm{Dom(f)} = \mathbb{R}^2$ *e gli insiemi di livello sono le iperboli date dall'equazione*

$$y = \frac{c}{x}$$

per $c \neq 0$, *e dall'equazione*

$$xy = 0, \quad \textit{cioè} \quad x = 0 \quad \mathrm{o} \quad y = 0$$

per $c = 0$.

Funzioni continue

Definizione

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $x \in \Omega$ *e sia* $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ *una funzione. Diciamo che* f *è continua in* x *se per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste un* $\delta > 0$ *tale che*

$$\forall y \in B_\delta(x) \cap \Omega \; : \; \|f(y) - f(x)\| < \varepsilon.$$

Diciamo che f *è continua su* Ω *se* f *è continua in ogni* $x \in \Omega$*.*

Proprietà delle funzioni continue

Teorema (Teorema di Weierstrass)

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *un insieme chiuso e limitato e sia* $f : \Omega \to \mathbb{R}$. *Se* f *è continua in* Ω, *allora assume massimo e minimo in* Ω.

In particolare, ogni funzione continua su un insieme chiuso e limitato è **limitata**.

Proprietà delle funzioni continue

Teorema (Continuità di somme e prodotti)

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e siano $f, g : \Omega \to \mathbb{R}^m$. Se le funzioni f e g sono continue in Ω, allora vi sono continue anche la funzione somma

$$f + g \ : \ \Omega \to \mathbb{R}^m, \qquad x \mapsto f(x) + g(x)$$

e la funzione prodotto scalare

$$f \cdot g \ : \ \Omega \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto f(x) \cdot g(x).$$

Dimostrazione

Teorema (Continuità della composizione)

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $E \subseteq \mathbb{R}^m$ e siano $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ e $g : E \to \mathbb{R}^k$ due funzioni tali che $f(\Omega) \subseteq E$. Sia inoltre $x \in \Omega$ tale che f è continua in x e g è continua in $f(x)$. Allora la funzione composta

$$g \circ f : \Omega \to \mathbb{R}^k, \qquad x \mapsto g(f(x))$$

è continua in x.

■ La condizione che entrambe le funzioni f e g siano continue è sufficiente ma NON necessaria. Infatti, la composizione $g \circ f$ può essere continua anche se una delle funzioni f, g non lo è : consideriamo le funzioni $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite da

$$g(y) = y^2, \qquad f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 0 \\ \\ x-1 & x > 0 \end{cases}$$

In questo caso la funzione composta $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \begin{cases} (x+1)^2 & x \leq 0 \\ \\ (x-1)^2 & x > 0 \end{cases}$$

è continua su tutto $\mathbb{R}$ nonostante la funzione f abbia una discontinuità di tipo salto nel punto $x = 0$.

Limiti

Definizione

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ una funzione. Sia in oltre $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un punto di **accumulazione** *per Ω. Diciamo che $L \in \mathbb{R}^m$ è il* **limite** *di f per x tendente a x_0 e scriviamo*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L,$$

se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che

$$\forall\, x \in B_\delta(x_0) \cap (\Omega \setminus \{x_0\}) \ : \ \|f(x) - L\| < \varepsilon.$$

- A differenza della continuità, il limite può essere definito anche nei punti in cui la funzione non è definita, ad esempio:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Teorema (**Unicità del limite**)

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ *una funzione e* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *un punto di accumulazione per* Ω. *Se esistono* $L_1, L_2 \in \mathbb{R}^m$ *tali che*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1 \quad e \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = L_2,$$

allora $L_1 = L_2$.

Dimostrazione

Direttamente dalla definizione della continuità e del limite discende il seguente teorema:

Teorema (Limiti e continuità)

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ una funzione e $x_0 \in \Omega$. Se x_0 è un punto di accumulazione per Ω, allora f è continua in x_0 se e solo se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Teorema (**Teorema della limitatezza locale**)

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ una funzione e $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un punto di accumulazione per Ω. Se esiste **finito**

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L,$$

allora esiste un intorno $U \subseteq \mathbb{R}^n$ di x_0 tale che f ristretta a $U \cap \Omega$ è limitata.

Dimostrazione:

Algebra dei limiti

Teorema (Limiti di somme e prodotti)

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e siano $f, g : \Omega \to \mathbb{R}^m$ due funzioni. Sia inoltre $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un punto di accumulazione per Ω. Se f e g ammettono limite finito in x_0, allora anche le funzioni somma $f + g$ e la funzione prodotto scalare $f \cdot g$ ammettono limite in x_0 e vale

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) \tag{1}$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x) \tag{2}$$

- Nella definizione di limite viene chiesto che la distanza tra $f(x)$ tenda a L quando x tende a x_0 **indipendentemente** da come x si avvicina a x_0. Questo rende il calcolo dei limiti di funzioni di più variabili in generale più complicato rispetto al caso $n = m = 1$.

D'altra parte, per dimostrare che una funzione non ammette limite in un punto assegnato, basta trovare due curve lungo le quali la funzione f tende a due valori diversi:

Esempio

Consideriamo la funzione

$$f(x,y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}, \qquad \mathrm{Dom(f)} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Vediamo che f NON AMMETTE limite per $(x,y) \to (0,0)$.

Teorema (Teorema della permanenza del segno)

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n, f : \Omega \to \mathbb{R}$ *un campo scalare e sia* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *un punto di accumulazione per* Ω. *Se esiste* $\lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$, $L \neq 0$, *allora esiste un intorno* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *di* x_0 *tale che* f *ristretta a* $U \cap (\Omega \setminus \{x_0\})$ *ha lo stesso segno di* L.

Teorema (Confronto dei limiti)

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e siano $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ due campi scalari. Sia inoltre $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un punto di accumulazione per Ω. Se f, g ammettono limite per $x \to x_0$ e se $f(x) \leq g(x)$ vale per ogni $x \in \Omega$, allora si ha

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x).$$

Teorema (**Teorema dei due carabinieri**)

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *e siano* $f, g, h : \Omega \to \mathbb{R}$ *tre campi scalari. Sia* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *un punto di accumulazione per* Ω*. Supponiamo che per ogni* $x \in \Omega$

$$h(x) \leq f(x) \leq g(x). \tag{3}$$

Se

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = L$$

allora f *ammette limite per* $x \to x_0$ *e vale*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L.$$

Esempio

Consideriamo la funzione

$$f(x,y) = \frac{|x\,y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \mathrm{Dom(f)} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Dimostriamo che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 \tag{4}$$

Campi scalari in $\mathbb{R}^2$: coordinate polari

Qualunque punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ può essere rappresentato nel modo seguente:

$$x = \rho \cos \theta$$
$$y = \rho \sin \theta,$$

dove $\rho \geq 0$ e $\theta \in [0, 2\pi)$. I numeri (ρ, θ) si dicono coordinate polari del punto (x, y). Geometricamente ρ rappresenta la distanza tra (x, y) e l'origine:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2},$$

e θ è l'angolo fra i vettori $(1, 0)$ e (x, y).

Esempio

Calcoliamo il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y), \quad f(x,y) = \frac{x^2\,y}{x^2+y^2}$$

Esempio

Consideriamo il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y), \quad f(x,y) = \frac{x\,y}{x^2+y^2}$$