Riparametrizzazioni e ascissa curvilinea

Riccarda Rossi

Università di Brescia

Analisi Matematica B

Definizione (Riparametrizzazione)

Sia $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *una curva e sia*

$$\varphi : [c, d] \to [a, b] \text{ una funzione biettiva derivabile con inversa derivabile.}$$

La curva $r : [c, d] \to \mathbb{R}^n$ *definita da*

$$r(s) = \gamma(\varphi(s)), \qquad s \in [c, d]$$

si dice **riparametrizzazione** *della curva* γ.

- φ *monot.* <u>*crescente*</u> $\Rightarrow$ r *è una riparametrizzazione* <u>*concorde*</u> *di* γ.
- φ *monot.* <u>*decrescente*</u> $\Rightarrow$ r *è una riparametrizzazione* <u>*discorde*</u> *di* γ.

■ Il sostegno di r coincide con il sostegno di γ.

Esempio

$$\gamma(t) = (t, 2t) \qquad t \in [0,1]$$
$$\tilde{\gamma}(t) = (1-t, 2-2t) \qquad t \in [0,1]$$

Esempio

$$\gamma(t) = (R\cos(t), R\sin(t)) \qquad t \in [0, 2\pi]$$
$$r(s) = (R\cos(2s), R\sin(2s)) \qquad s \in [0, \pi]$$

La nozione di lunghezza di una curva è invariante per riparametrizzazioni

Teorema

Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *una curva di classe* $C^1([a,b])$*. Sia* $r : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ *una sua riparametrizzazione. Allora*

$$L(r) = L(\gamma).$$

Dimostrazione: Per ipotesi esiste una funzione biettiva derivabile $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ tale che

$$r(s) = \gamma(\varphi(s)), \qquad s \in [c,d].$$

La lunghezza di r è data da

$$L(r) = \int_c^d \|r'(s)\| \, ds$$

Vi sono due possibilità:

Ascissa curvilinea per una curva regolare

Definizione

Data $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una curva regolare. Chiamiamo ascissa curvilinea di γ (o funzione lunghezza dell'arco)

$$s : [a, b] \to \mathbb{R} \text{ data da } s(t) := \int_a^t \|\gamma'(\tau)\| \, d\tau, \ \ t \in [a, b]$$

- s è derivabile di $[a, b]$ con $s'(t) = \|\gamma'(t)\|$

Riparametrizzazione di γ rispetto alla lunghezza dell'arco

Da $s'(t) = \|\gamma'(t)\|$ deduco che

1. $s \in C^1([a, b])$:

2. $s'(t) > 0$ per ogni $t \in [a, b]$

Riparametrizzazione di γ rispetto alla lunghezza dell'arco

Sia φ la funzione inversa di s. Quindi φ è definita su $\mathrm{Im}(s)$ a valori in $\mathrm{dom}(s)$

Riparametrizzazione di γ rispetto alla lunghezza dell'arco

Riassumendo, abbiamo introdotto la funzione $\varphi : [0, L] \to [a, b]$ la funzione inversa dell'ascissa curvilinea. Quindi:

1. φ è invertibile;
2. φ è di classe C^1 su $[0, L]$
3. l'inversa di φ, e cioè s, è una funzione di classe C^1

Riparametrizzazione di γ rispetto alla lunghezza dell'arco

Queste proprietà garantiscono che φ è un cambiamento di variabile ammissibile per γ. Cioè, possiamo considerare la riparametrizzazione di γ definita da

$$r : [0, L] \to \mathbb{R}^n, \qquad r(\sigma) = \gamma(\varphi(\sigma)) \qquad \forall\, \sigma \in [0, L].$$

Definizione

Chiamiamo r la riparametrizzazione di γ rispetto alla lunghezza dell'arco.

Riparametrizzazione di γ rispetto alla lunghezza dell'arco

Teorema

Data $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *una curva regolare e sia* $s : [a, b] \to [0, L]$ *la sua ascissa curvilinea, e sia* $r : [0, L] \to \mathbb{R}^n$ *la riparametrizzazione di* γ *rispetto alla lunghezza dell'arco. Si ha*

$$\|r'(\sigma)\| = 1 \quad \forall\, \sigma \in (0, L)\,.$$

Ascissa curvilinea: parametro intrinseco della curva

$$\|r'(\sigma)\| = 1 \quad \forall\, \sigma \in (0, L)\,.$$

Quindi

$$\int_0^s \|r'(\sigma)\|\, d\sigma = s \quad \forall\, s \in [0, L]$$

e cioè, passando da $r(0) = \gamma(a)$ a $r(s)$, si percorre un cammino di lunghezza s.