Scritto di Analisi Matematica B – 07 Settembre 2020

Tempo a disposizione: 75 minuti

Esercizio 1. Sia $\alpha \geq 0$. Si consideri il campo scalare

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x|y|^\alpha)\arctan(\sqrt[3]{x})}{\exp(\sqrt{x^2+y^2})-1} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Per quali valori f è continuo in $(0,0)$?
2. Calcolare $\nabla f(0,0)$ al variare di $\alpha \geq 0$.
3. Per $v \neq \overrightarrow{e}_1$ e $v \neq \overrightarrow{e}_2$, calcolare $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ al variare di $\alpha \geq 0$.
4. Discutere la differenziabilità di f in $(0,0)$ al variare di $\alpha \geq 0$.

[**Punteggio: 6 punti**]

Esercizio 2. Determinare i punti e i valori di estremo assoluto che la funzione

$$f(x,y) = \exp(y + x^2)$$

assume sul trapezio T di vertici $A = (1,0)$, $B = (4,0)$, $C = (0,4)$, $D = (0,1)$.
[**Punteggio: 5 punti**]

Esercizio 3. Si consideri il campo vettoriale

$$\overrightarrow{F}(x,y) = \left(\frac{2xy}{1+x^4} - \frac{4x^3\sin(y^3)}{(1+x^4)^2}\right)\overrightarrow{i} + \left(\arctan(x^2) + \frac{3y^2\cos(y^3)}{1+x^4}\right)\overrightarrow{j}.$$

Determinare $\mathrm{dom}(\overrightarrow{F})$. Delle seguenti affermazioni:

1. $\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{1+x^4}$ per ogni $(x,y) \in \mathrm{dom}(\overrightarrow{F})$;
2. $\overrightarrow{F}$ è conservativo e il campo scalare

   $$\varphi(x,y) = \arctan(x^2)y + \frac{\sin(y^3)}{1+x^4}$$

   definito sul suo dominio naturale, è un potenziale per $\overrightarrow{F}$;
3. La circuitazione di $\overrightarrow{F}$ lungo l'ellisse di centro $(2,1)$ e semiassi $a = 3$ e $b = 2$, percorsa in senso orario, è uguale a 2π;
4. $\overrightarrow{F}$ è irrotazionale;
5. L'integrale curvilineo $\int_\gamma \overrightarrow{F}$, ove γ è il segmento congiungente il punto $(1,2)$ al punto $(2,1)$, vale

   $$\frac{\sin(1)}{17} + \arctan(4) - \frac{\pi}{2} - \frac{\sin(8)}{2}$$

tutte e sole quelle corrette sono... **Giustificare accuratamente ogni risposta**.
[Punteggio: 6 punti]

Esercizio 4. Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_D 2x(1-x^2)y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

sul dominio

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; 0 \le x \le 1,\; 1-x^2 \le y \le \sqrt{1-x^2}\}.$$

Esercizio 5. Rispondere alle seguenti domande:

(a) Dare la definizione di campo conservativo.

(b) Dare la definizione di funzione differenziabile in un punto e il teorema sul rapporto fra differenziabilità e derivabilità direzionale.

(c) Enunciare il primo teorema fondamentale del calcolo integrale per l'integrale di Riemann.

(d) Dimostrare, a scelta, uno dei suddetti teoremi.

[Punteggio: 8 punti]