

Integrazione delle funzioni razionali fratte

Avvertenza: è opportuno che lo studente provi a rifare tutti i calcoli presentati nel seguito.

1 Caso generale

Consideriamo l'integrale (indefinito o definito)

$$\int \frac{N(x)}{D(x)} dx$$

ove $N(x)$, $D(x)$ polinomi a coefficienti reali.

Supponiamo $\text{grado}(N) \geq \text{grado}(D)$. Per esempio:

$$f_1(x) = \frac{x}{x+1}, \quad f_2(x) = \frac{x^2}{x^2+1}, \quad f_3(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$$

Dividiamo $N(x)$ per $D(x)$, cioè scriviamo

$$\frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}, \quad \text{con}$$

$Q(x)$ polinomio quoziente,
 $R(x)$ polinomio resto, $\text{grado}(R) < \text{grado}(D)$.

Allora

$$\int \frac{N(x)}{D(x)} dx = \int \overbrace{Q(x)}^{\text{polinomio!}} dx + \int \frac{R(x)}{D(x)} dx$$

e $\text{grado}(R) < \text{grado}(D)$!

Per esempio

$$\begin{aligned} \frac{x}{x+1} &= \frac{x+1-1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}, \\ &\downarrow \\ \int \frac{x}{x+1} dx &= \int 1 dx - \int \frac{1}{x+1} dx \\ &= x - \ln(|x+1|) + c \\ \frac{x^2}{x^2+1} &= \frac{x^2+1-1}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{x^2+1}, \\ &\downarrow \\ \int \frac{x^2}{x^2+1} dx &= \int 1 dx - \int \frac{1}{x^2+1} dx \\ &= x - \arctan(x) + c \\ \frac{x^3}{x^2+1} &= \frac{x^3+x-x}{x^2+1} = \frac{x(x^2+1)}{x^2+1} - \frac{x}{x^2+1}, \\ &\downarrow \\ \int \frac{x^3}{x^2+1} dx &= \int x dx - \int \frac{x}{x^2+1} dx \\ &= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + c \end{aligned}$$

D'ora in poi

$$\int \frac{R(x)}{D(x)} dx$$

ove $R(x)$, $D(x)$ polinomi a coefficienti reali e

$$\text{grado}(R) < \text{grado}(D)$$

Tre casi:

- $\text{grado}(D) = 1$
- $\text{grado}(D) = 2$
- $\text{grado}(D) > 2$

2 Caso I: $\text{grado}(D) = 1$

Si ha

$$\begin{aligned}\text{grado}(D) = 1 &\Rightarrow D(x) = ax + b, \quad a \neq 0 \\ \text{grado}(R) < \text{grado}(D) &\Rightarrow \text{grado}(R) = 0 \\ &\Rightarrow R(x) = k.\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}\int \frac{R(x)}{D(x)} dx &= \int \frac{k}{ax + b} dx \\ &= \frac{k}{a} \int \frac{a}{ax + b} dx \\ &= \frac{k}{a} \ln(|ax + b|) + c\end{aligned}$$

Per esempio

$$\begin{aligned}\int \frac{3}{2x-1} dx &= \frac{3}{2} \int \frac{2}{2x-1} dx \\ &= \frac{3}{2} \ln(|2x-1|) + c\end{aligned}$$

3 Caso II: $\text{grado}(D) = 2$

Allora

$$\begin{aligned}D(x) &= ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0 \\ \text{grado}(R) < \text{grado}(D) &\Rightarrow \text{grado}(R) \leq 1 \\ &\Rightarrow R(x) = \alpha x + \beta.\end{aligned}$$

Consideriamo il discriminante

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Tre casi:

1. $\Delta > 0$
2. $\Delta = 0$
3. $\Delta < 0$

3.1 Caso II (1): $\text{grado}(D) = 2$ & $\Delta > 0$

Allora

$$D(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

x_1, x_2 radici reali distinte di $D(x) = 0$

Allora, esistono $A, B \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{R(x)}{D(x)} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \int \frac{R(x)}{D(x)} dx &= \int \frac{A}{x - x_1} dx + \int \frac{B}{x - x_2} dx \\ &= A \ln(|x - x_1|) + B \ln(|x - x_2|) + c \end{aligned}$$

Per esempio

$$\frac{2}{x^2 + 5x + 4} = \frac{2}{(x + 4)(x + 1)} = \frac{A}{x + 4} + \frac{B}{x + 1},$$

e trovo A e B facendo denominatore comune:

$$\begin{aligned} A(x + 1) + B(x + 4) = 2 &\Leftrightarrow \begin{cases} (A + B)x = 0 \\ A + 4B = 2 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} A = -B \\ 3B = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int \frac{2}{x^2 + 5x + 4} dx &= -\frac{2}{3} \int \frac{1}{x + 4} dx + \frac{2}{3} \int \frac{1}{x + 1} dx \\ &= \frac{2}{3} \ln(|x + 1|) - \frac{2}{3} \ln(|x + 4|) + c \end{aligned}$$

Per esempio

$$\begin{aligned} \int \frac{3x + 1}{x^2 - 5x + 6} dx &= \int \frac{3x + 1}{(x - 2)(x - 3)} dx \\ &= \int \frac{A}{x - 2} dx + \int \frac{B}{x - 3} dx, \end{aligned}$$

e trovo A e B facendo denominatore comune:

$$\begin{aligned} A(x - 3) + B(x - 2) &= 3x + 1 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (A + B)x = 3x \\ -3A - 2B = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Quindi $B = 10$ e $A = -7$ e

$$\begin{aligned} \int \frac{3x + 1}{x^2 - 5x + 6} dx &= -7 \int \frac{1}{x - 2} dx + 10 \int \frac{1}{x - 3} dx \\ &= -7 \ln(|x - 2|) + 10 \ln(|x - 3|) + c \end{aligned}$$

3.2 Caso II (2): $\text{grado}(D) = 2$ & $\Delta = 0$

Allora

$$D(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$$

$D(x) = 0$ ha due radici reali coincidenti

Due casi:

- $\text{grado}(R) = 0$
- $\text{grado}(R) = 1$
- Se $\text{grado}(R) = 0$, allora $R(x) = k$ e

$$\begin{aligned}\int \frac{R(x)}{D(x)} dx &= \int \frac{k}{a(x - x_1)^2} dx \\ &= \frac{k}{a} \int (x - x_1)^{-2} dx \\ &= -\frac{k}{a} (x - x_1)^{-1} + c\end{aligned}$$

- Se $\text{grado}(R) = 1$, allora $R(x) = \alpha x + \beta$, con $\alpha \geq 0$. Due metodi:

1. Scompongo nella somma di due frazioni:

$$\begin{aligned}\int \frac{R(x)}{D(x)} dx &= \int \frac{\alpha x + \beta}{a(x - x_1)^2} dx \\ &= \int \frac{A}{x - x_1} dx + \int \frac{B}{(x - x_1)^2} dx\end{aligned}$$

Ad esempio

$$\begin{aligned}\frac{x + 2}{(x - 2)^2} &= \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{(x - 2)^2} \\ \Leftrightarrow A(x - 2) + B &= x + 2\end{aligned}$$

Quindi $A = 1$, $B = 4$ e

$$\begin{aligned}\int \frac{x + 2}{(x - 2)^2} dx &= \int \frac{1}{x - 2} dx + \int \frac{4}{(x - 2)^2} dx \\ &= \ln(|x - 2|) - 4 \frac{1}{x - 2} + c\end{aligned}$$

2. evidenzio al numeratore la derivata del denominatore, con manipolazioni algebriche.

Ad esempio

$$\begin{aligned}\frac{x + 2}{(x - 2)^2} &= \frac{x + 2}{x^2 - 4x + 4} \begin{cases} (x^2 - 4x + 4)' \\ = 2x - 4 \end{cases} \\ &= \frac{1}{2} \frac{2x + 4 - 4 + 4}{x^2 - 4x + 4} \\ &= \frac{1}{2} \frac{(2x - 4) + 8}{x^2 - 4x + 4}\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}\int \frac{x + 2}{(x - 2)^2} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x - 4}{x^2 - 4x + 4} dx + 4 \int \frac{1}{(x - 2)^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2 - 4x + 4) - 4 \frac{1}{x - 2} + c = \ln(|x - 2|) - 4 \frac{1}{x - 2} + c\end{aligned}$$

3.3 Caso II (3): $\text{grado}(D) = 2$ & $\Delta < 0$

Allora D ha due radici complesse coniugate, quindi non si fattorizza nel prodotto di due polinomi reali di grado 1.

Per esempio $D(x) = x^2 + x + 1$.

Calcolo

$$\int \frac{x+1}{x^2+x+1} dx$$

Primo passo: evidenzio al numeratore la derivata del denominatore ($(x^2+x+1)' = 2x+1$).

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{x^2+x+1} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+2+1-1}{x^2+x+1} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+x+1} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+x+1} dx \end{aligned}$$

Secondo passo: per calcolare

$$\int \frac{1}{x^2+x+1} dx$$

evidenzio al denominatore la somma di 1 e il quadrato di un binomio (in modo da riportarmi a $\sim (\arctan)'$).

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2+x+1} dx &= \int \frac{1}{x^2+x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1} dx \\ &= \int \frac{1}{\frac{3}{4}+(x+\frac{1}{2})^2} dx \\ &= \int \frac{1}{\frac{3}{4}\left(1+\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\right)} dx \\ &= \frac{4}{3} \int \frac{1}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2} dx \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{3} \int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2} dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c \end{aligned}$$

Quindi

$$\int \frac{x+1}{x^2+x+1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c$$

4 Caso III: $\text{grado}(D) > 2$

Allora D si fattorizza nel prodotto di

- fattori di primo grado
- fattori irriducibili di secondo grado

Per esempio

$$\begin{aligned}x^3 - 1 &= (x - 1)(x^2 + x + 1) \\x^4 - 1 &= (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1) \\x^3 - 2x^3 &= x^2(x - 2) \\x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 1 &= (x + 1)^2(x^2 + 1)\end{aligned}$$

• Per calcolare

$$\int R(x)/D(x) dx$$

scomponiamo $R(x)/D(x)$ nella somma di frazioni (“fratti semplici”) aventi come denominatori i fattori di D . Per la ricerca dei numeratori, si tiene conto della molteplicità dei fattori in cui è scomposto D .

Per esempio

$$\frac{1}{x^3 - 1} = \frac{1}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1}$$

facendo denominatore comune, trovo

$$\begin{aligned}1 &= Ax^2 + Ax + A + Bx^2 - Bx + Cx - C \\ \Rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ A + C - B = 0 \\ A - C = 1 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} A = -B \\ C = 2B = -2A \\ A + 2A = 1 \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} B = -\frac{1}{3} \\ C = -\frac{2}{3} \\ A = \frac{1}{3} \end{cases}\end{aligned}$$

Quindi

$$\int \frac{1}{x^3 - 1} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{x - 1} dx - \frac{1}{3} \int \frac{x + 2}{x^2 + x + 1} dx$$

Per calcolare il secondo, evidenzio al numeratore la derivata del denominatore ($= 2x + 1$)

$$\begin{aligned}\int \frac{x + 2}{x^2 + x + 1} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{(2x + 1) + 3}{x^2 + x + 1} dx \\ \frac{1}{2} \int \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{3}{x^2 + x + 1} dx \\ \frac{1}{2} \ln(x^2 + x + 1) + \sqrt{3} \arctan\left(\frac{2x + 1}{\sqrt{3}}\right) + c\end{aligned}$$

Per esempio, calcolo

$$I = \int \frac{1}{x^2(x^2 + 3)} dx$$

N.B.: il fattore x ha molteplicità 2.

Cerco $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\frac{1}{x^2(x^2 + 3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 3}$$

Facendo denominatore comune, trovo

$$\begin{aligned}1 &= Ax(x^2 + 3) + B(x^2 + 3) + (Cx + D)x^2 \\ 1 &= Ax^3 + 3Ax + Bx^2 + 3B + Cx^3 + Dx^2 \\ \Rightarrow \begin{cases} A + C = 0 \\ B + D = 0 \\ 3A = 0 \\ 3B = 1 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} B = \frac{1}{3} \\ A = 0 \\ D = -\frac{1}{3} \\ C = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Quindi

$$\int \frac{1}{x^2(x^2+3)} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{x^2} dx - \frac{1}{3} \int \frac{1}{x^2+3} dx$$

Calcolo

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2+3} dx &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2} dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + c \end{aligned}$$