Formule di Gauss-Green

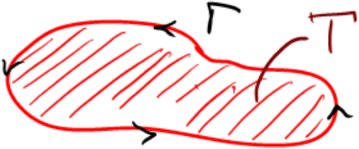
Riccarda Rossi

Università di Brescia

Analisi II

Richiami di teoria

- Γ curva chiusa in $\mathbb{R}^2$, regolare a tratti, percorsa in senso antiorario
- $T \subset \mathbb{R}^2$ regione "interna" a Γ



- $\overrightarrow{F} : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\overrightarrow{F} = F_1 \overrightarrow{i}_1 + F_2 \overrightarrow{i}_2$, $\overrightarrow{F} \in C^1(A)$, A insieme aperto contenente T e il sostegno di Γ

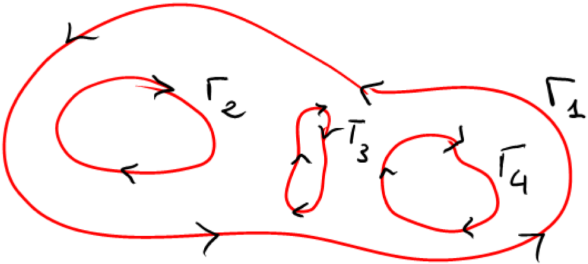
$$(1) \quad \iint_T \frac{\partial F_2}{\partial x}\, dxdy = \oint_\Gamma F_2\, dy = \oint_\Gamma (0 \overrightarrow{i}_1 + F_2 \overrightarrow{i}_2) \cdot d\Gamma$$

$$(2) \quad -\iint_T \frac{\partial F_1}{\partial y}\, dxdy = \oint_\Gamma F_1\, dx = \oint_\Gamma (F_1 \overrightarrow{i}_1 + 0 \overrightarrow{i}_2) \cdot d\Gamma$$

$$(3) \quad \iint_T \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dxdy = \oint_\Gamma F_1\, dx + F_2\, dy$$

- T NON semplicemente connesso:

$$\iint_T \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dxdy = \oint_{\Gamma_1} \overrightarrow{F} \cdot d\Gamma_1 - \sum_{k=2}^{n} \oint_{\Gamma_k} \overrightarrow{F} \cdot d\Gamma_k$$



Casi particolari

1. Area di una regione piana

$$\mathrm{Area}(T) = \oint_{\Gamma} x\, dy$$

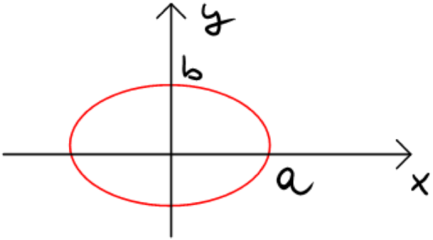
$$\mathrm{Area}(T) = -\oint_{\Gamma} y\, dx$$

$$\mathrm{Area}(T) = \frac{1}{2}\oint_{\Gamma} (x\, dy - y\, dx)$$

Calcolare l'area di

$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\},$$

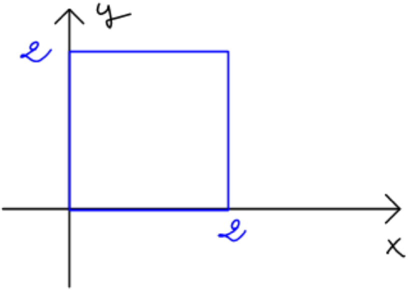
dove $a > 0$, $b > 0$ sono fissati.



Es. 2.

$$\oint_\Gamma (x^3 - xy^3)\, dx + (y^2 - 2xy)\, dy$$

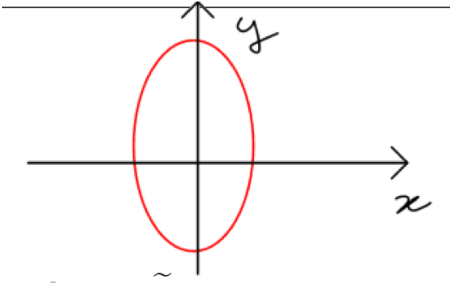
dove Γ è il perimetro del quadrato $D = [0,2] \times [0,2]$ percorso in senso antiorario.



Es. 3.

$$I = \oint_{\Gamma} (e^{x^4} - y)\, dx + [x^3 + \sinh(3y^2)]\, dy$$

dove Γ è l'ellisse $9x^2 + 4y^2 = 36$ percorso <u>due volte</u> in senso <u>orario</u>.



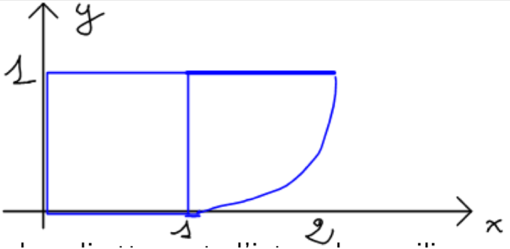
Es. 4.

Sia $A = Q \cup D$, con

$$\begin{cases} Q = [0,1] \times [0,1] \\ D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 1 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 1\} \end{cases}$$

e sia Γ il bordo di A, orientato positivamente. Si calcoli l'integrale

$$\oint_\Gamma (x^3 - y)\,\mathrm{d}x + (x+y)\,\mathrm{d}y$$

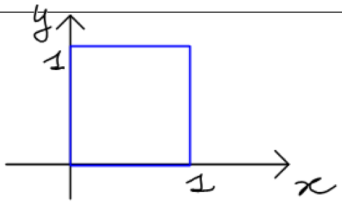


- Non conviene calcolare direttamente l'integrale curvilineo: dovrei "spezzarlo" in 4 integrali, essendo $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$.

Es. 5.

Sia Γ la curva bordo del quadrato $Q = [0,1] \times [0,1]$, orientata in **senso orario**. Si calcoli

$$\oint_{\Gamma} \frac{x}{1+y}\, \mathrm{d}x - (\sin(y) + x^2 y)\, \mathrm{d}y$$



• Conviene applicare la formula di Gauss-Green "al rovescio" per evitare di parametrizzare i 4 lati del quadrato.