

Integrali di superficie

Riccarda Rossi

Università di Brescia

Analisi II

Richiami di teoria

- Sia $\mathcal{S} = \vec{r}(T)$ una superficie parametrica in \mathbb{R}^3 , ove $T \subset \mathbb{R}^2$ è connesso e limitato e

$\vec{r} : T \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{r} \in C^1(T)$, è data da:

$$\vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i}_1 + y(u, v)\vec{i}_2 + z(u, v)\vec{i}_3, \quad (u, v) \in T$$

- Sia $g : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ limitata su \mathcal{S} , $g = g(x, y, z)$

Si definisce l'integrale di superficie di g su \mathcal{S} :

$$\iint_{\mathcal{S}} g(x, y, z) d\mathcal{S} := \iint_T g(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| dudv$$

$$\text{con } \begin{cases} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} \vec{i}_1 + \frac{\partial y}{\partial u} \vec{i}_2 + \frac{\partial z}{\partial u} \vec{i}_3 \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v} \vec{i}_1 + \frac{\partial y}{\partial v} \vec{i}_2 + \frac{\partial z}{\partial v} \vec{i}_3 \\ \underbrace{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}}_{\text{prodotto vettoriale di } \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \text{ e } \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}} = \det \begin{bmatrix} \vec{i}_1 & \vec{i}_2 & \vec{i}_3 \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} \end{cases}$$

In particolare:

$$\text{Area}(\mathcal{S}) = \iint_{\mathcal{S}} d\mathcal{S} = \iint_T \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| du dv$$

Se \mathcal{S} è data in forma cartesiana:

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in T,$$

allora:

$$\iint_{\mathcal{S}} g(x, y, z) d\mathcal{S} = \iint_T g(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

e

$$\text{Area}(\mathcal{S}) = \iint_T \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

Es. 1.

L'area \mathcal{A} della porzione di paraboloidoide

$$z = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2,$$

$$\text{con } (x, y) \in T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 8\}.$$

Es. 2.

L'area \mathcal{A} della porzione di *paraboloide iperbolico*

$$z = x^2 - y^2$$

racchiusa nel cilindro solido infinito

$$\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Es. 3.

$$I = \iint_S x^2 ds$$

ove S è la superf.

$$\begin{aligned}\vec{r}(u, v) &= 3 \cos(u) \vec{i}_1 + 3 \sin(u) \vec{i}_2 + v \vec{i}_3, \\ u &\in [0, 2\pi], \quad v \in [1, 5].\end{aligned}$$

Es. 4.

$$I = \iint_S g(x, y, z) \, ds$$

con

$$g(x, y, z) = 2x + \frac{4}{3}y + z$$

e S è la porzione di superficie del piano

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1,$$

contenuta in $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$.

Es. 6.

$$I = \iint_S (z - y^2) (1 + 16x^2 + 16y^2)^{-1/2} ds,$$

e

$$S : z = f(x, y) = 2x^2 + y^2$$

$$\text{con } (x, y) \in T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq |x|\},$$
