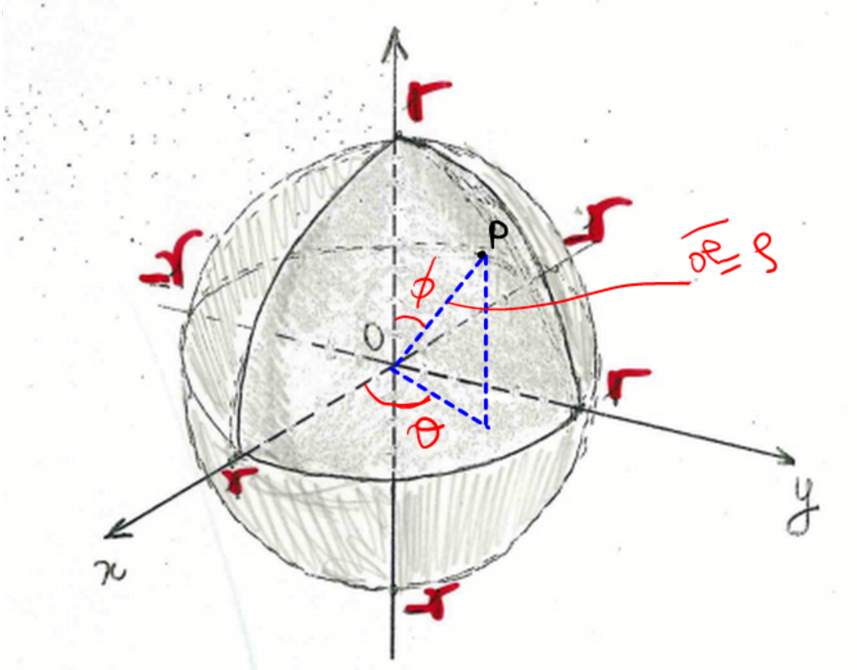
Esercizi su integrali tripli: cambiamento di variabili

Riccarda Rossi

Università di Brescia

Analisi II


P
O
$\overline{OP} = \rho$
ϕ
θ
r
x
y

Coordinate sferiche

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\theta)\sin(\phi) \\ y = \rho\sin(\theta)\sin(\phi) \\ z = \rho\cos(\phi) \end{cases} \qquad \rho \in [0, +\infty), \ \phi \in [0, \pi], \ \theta \in [0, 2\pi]$$

Si calcola

$$J = \rho^2 \sin(\phi) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \ \to \ \rho^2 \sin(\phi)\ \mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta$$

Quindi

$$\iiint_T f(x,y,z)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$
$$= \iiint_{\widetilde{T}} f(\rho\cos(\theta)\sin(\phi), \rho\sin(\theta)\sin(\phi), \rho\cos(\phi))\rho^2 \sin(\phi)\ \mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta$$

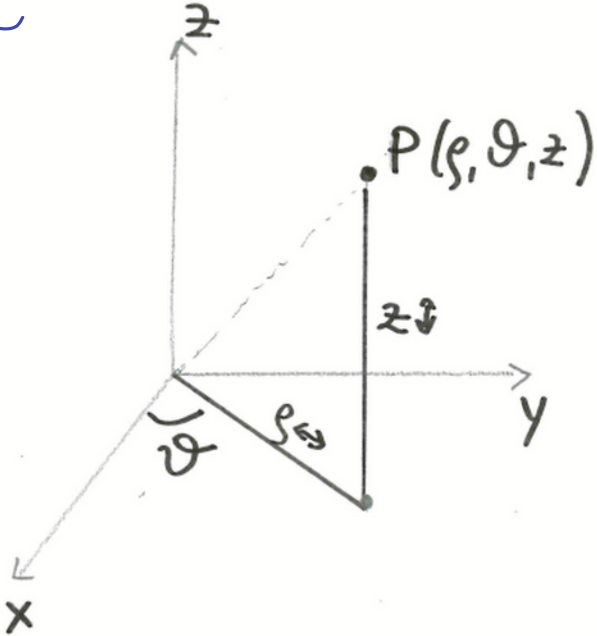
- Il passaggio alle coordinate sferiche è conveniente se

nell'espressione di $\underline{f}$, o nell'espressione di $\underline{T}$,

compaiono espressioni con

$$x^2 + y^2 + z^2 \quad \text{(in coordinate sferiche } \to \ \rho^2\text{)}$$

Coordinate
cilindriche



Coordinate polari cilindriche

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\theta) \\ z = z \end{cases} \qquad \rho \in [0, +\infty),\ \theta \in [0, 2\pi],\ z \in \mathbb{R}$$

Si calcola

$$J = \rho \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \ \to \ \rho\ \mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$

Quindi

$$\iiint_T f(x, y, z)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_{\widetilde{T}} f(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta), z)\rho\ \mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$

- Passaggio alle coordinate cilindriche <u>conveniente</u> se

nell'espressione di $\underline{f}$, e/o nell'espressione di $\underline{T}$,

compaiono espressioni con

$$x^2 + y^2 \quad (\text{in coordinate cilindriche } \to \ \rho^2)$$