

Esercizi sulla formula per la derivazione della composizione di campi vettoriali

Richiami di teoria. Siano $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m \geq 1$, e sia

$$\vec{F} : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \quad \text{un campo vettoriale}$$

(con $A \subset \mathbb{R}^n$ insieme aperto), quindi

$$\vec{F}(x) = F_1(x)\vec{i}_1 + \dots + F_m(x)\vec{i}_m = (F_1(x), \dots, F_m(x)) \quad \forall x \in A \subset \mathbb{R}^n,$$

e chiamiamo *funzioni componenti* i campi scalari $F_k : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, con $k = 1, \dots, m$.

Ricordiamo che $\vec{F} : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ è differenziabile in $x_0 \in A$ se e solo se per ogni $k = 1, \dots, m$ le funzioni F_k sono differenziabili (nel senso dei campi scalari) in x_0 . Allora sono ben definiti i vettori gradienti

$$\nabla F_k(x_0) = \left(\frac{\partial F_k}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial F_k}{\partial x_n}(x_0) \right) \quad \text{per ogni } k = 1, \dots, m.$$

La matrice $\mathbf{m} \times \mathbf{n}$ di m righe e n colonne

$$D_{\vec{F}}(x_0) = \begin{pmatrix} \nabla F_1(x_0) \\ \vdots \\ \nabla F_m(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

si chiama **matrice jacobiana** di \vec{F} in x_0 e contiene **tutte** le “informazioni differenziali” su \vec{F} in x_0 .

Derivazione della funzione composta. Siano $p, n, m \geq 1$ e siano dati

$$\vec{G} : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n \quad A \subset \mathbb{R}^p \text{ aperto}, \quad \vec{F} : B \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \quad B \subset \mathbb{R}^n \text{ aperto},$$

tali che $\text{im}(\vec{G}) \subset B$. Quindi è definito il campo vettoriale

$$\vec{F} \circ \vec{G} : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

Sia $x_0 \in A$ e supponiamo che

- \vec{G} sia differenziabile in $x_0 \Rightarrow D_{\vec{G}}(x_0)$
- \vec{F} sia differenziabile in $\vec{G}(x_0) \Rightarrow D_{\vec{F}}(\vec{G}(x_0))$.

Allora, $\vec{F} \circ \vec{G}$ è differenziabile in x_0 e

$$D_{\vec{F} \circ \vec{G}}(x_0) = D_{\vec{F}}(\vec{G}(x_0)) \cdot D_{\vec{G}}(x_0) \quad \text{ove } \cdot \text{ prodotto di matrici.}$$

Osservazioni:

- è la generalizzazione della formula per la derivazione della composizione di funzioni di variabile reale, a valori in \mathbb{R} :

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$$

- il prodotto matriciale è ben definito perché

$$D_{\vec{G}}(x_0) \text{ matrice } n \times p$$

$$D_{\vec{F}}(\vec{G}(x_0)) \text{ matrice } m \times n$$

quindi ricordando

$$(m \times n) \cdot (n \times p) = m \times p$$

otteniamo che

$$D_{\vec{F} \circ \vec{G}}(x_0) \text{ matrice } m \times p$$

come deve essere perché

$$\vec{F} \circ \vec{G} : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

- ora abbandoniamo la notazione \vec{G}, \vec{F} per trattare in modo unificato campi scalari e vettoriali..

Esercizio 1. Date

$$G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad G(x) := -x \vec{i}_1 + (x^2 + 1) \vec{i}_2 + \cos(x) \vec{i}_3$$

$$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 y_2 + y_3^3$$

calcolare

$$D_{F \circ G}(x) \quad \forall x \in \text{dom}(F \circ G) = \mathbb{R}.$$

Svolgimento. Osserviamo che $D_{F \circ G}(x)$ è ben definito per ogni $x \in \mathbb{R}$ perché

- $G = (G_1, G_2, G_3)$ è differenziabile su \mathbb{R} e per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$D_G(x) = \begin{pmatrix} G'_1(x) \\ G'_2(x) \\ G'_3(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2x \\ -\sin(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

- F è differenziabile su \mathbb{R}^3 e per ogni $(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$

$$D_F(y_1, y_2, y_3) = \nabla F(y_1, y_2, y_3) = (2y_1 y_2, y_1^2, 3y_3^2).$$

Siccome $F \circ G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, mi aspetto che $D_{F \circ G}(x)$ sia matrice 1×1 , cioè uno scalare (la derivata!). In effetti per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} (F \circ G)'(x) &= D_{F \circ G}(x) = \nabla F(G(x)) \cdot D_G(x) \quad (\cdot \text{ prodotto scalare}) \\ &= (2(-x)(x^2 + 1), (-x)^2, 3(\cos(x))^2) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2x \\ -\sin(x) \end{pmatrix} \\ &= 4x^3 + 2x - 3(\cos(x))^2 \sin(x). \end{aligned}$$

Esercizio 2. Date

$$(1) \quad \begin{aligned} G : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3, \quad G(x_1, x_2) := x_2 \vec{i}_1 + x_1 \vec{i}_2 + x_2 \vec{i}_3 \\ F : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2, \quad F(y_1, y_2, y_3) = y_1 y_2 \vec{i}_1 + y_3^2 \vec{i}_2 \end{aligned}$$

calcolare

$$D_{F \circ G}(x_1, x_2) \quad \forall (x_1, x_2) \in \text{dom}(F \circ G) = \mathbb{R}^2.$$

Svolgimento. Osserviamo che $D_{F \circ G}(x_1, x_2)$ è ben definito per ogni $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ perché

- $G = (G_1, G_2, G_3)$ è differenziabile su \mathbb{R}^2 e per ogni $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

$$D_G(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \nabla G_1(x_1, x_2) \\ \nabla G_2(x_1, x_2) \\ \nabla G_3(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- F è differenziabile su \mathbb{R}^3 e per ogni $(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$

$$D_F(y_1, y_2, y_3) = \begin{pmatrix} \nabla F_1(y_1, y_2, y_3) \\ \nabla F_2(y_1, y_2, y_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 & y_1 & 0 \\ 0 & 0 & 2y_3 \end{pmatrix}$$

Siccome $F \circ G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, mi aspetto che $D_{F \circ G}(x_1, x_2)$ sia una matrice 2×2 . In effetti per ogni $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

$$D_{F \circ G}(x_1, x_2) = D_F(G(x_1, x_2)) \cdot D_G(x_1, x_2) \quad (\cdot \text{ prodotto matriciale})$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 & x_1 \\ 0 & 2x_2 \end{pmatrix}$$

Esercizio assegnato. Date G e F come in (1), calcolare $D_{G \circ F}(y_1, y_2, y_3)$ per ogni $(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ (si noti che sarà una matrice 3×3).
