Esercizio 11

Calcolare il flusso del campo

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = xy\,\overrightarrow{i}_1 + xy\,\overrightarrow{i}_2 + z\,\overrightarrow{i}_3$$

attraverso la superficie chiusa $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$, dove

$$\mathcal{S}_1 : \begin{cases} z = 1 - x^2 - y^2 \\ z \geq 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \mathcal{S}_2 : \begin{cases} z = 0 \\ x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$$

Passo 1: Uso il Teorema della divergenza:

$$\iint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\, d\mathcal{S} = \iiint_V \operatorname{div} \overrightarrow{F}\, dx\, dy\, dz$$

dove

$$V = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 \leq 1\,,\ 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2 \right\}$$

Passo 2: Calcolo $\operatorname{div} \overrightarrow{F}$:

$$\operatorname{div} \overrightarrow{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = y + x + 1$$

<u>Passo 3</u>: Calcolo:

$$\iiint_V \operatorname{div}\overrightarrow{F}\, dx\, dy\, dz$$

$$= \iiint_V y\, dx\, dy\, dz + \iiint_V x\, dx\, dy\, dz + \iiint_V 1\, dx\, dy\, dz$$

$$= \text{vol}(V)$$

$f_1(x, y, z) = y$ ed $f_2(x, y, z) = x$ sono dispari in y ed x e V è simmetrico. Quindi i primi due integrali sono zero.

<u>Passo 4</u>: calcolo vol(V) passando a coordinate cilindriche

$$V \ \rightarrow \ \widetilde{V} = \left\{ (\rho, \vartheta, z) : \quad \begin{array}{c} (\rho, \vartheta) \in [0, 1] \times [0, 2\pi] \\ \\ 0 \leq z \leq 1 - \rho^2 \end{array} \right\}$$

$$\text{vol}(V) = \iiint_{\widetilde{V}} \rho\, d\rho d\vartheta dz$$

$$= \iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} \rho \left(\int_0^{1-\rho^2} dz \right) d\rho\, d\vartheta$$

$$= 2\pi \int_0^1 \rho(1 - \rho^2) d\rho = \frac{\pi}{2}$$