Richiami di teoria

Problema di Cauchy. Dati:

- $I \subset \mathbb{R}$ intervallo, limitato o no,
- $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}$,
- $f : I \times \mathcal{Y} \to \mathbb{R}$

Dati $t_0 \in I$, $y_0 \in \mathcal{Y}$ si ha il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

con y definita e derivabile in un opportuno intorno $I(t_0) \subset I$ di t_0.

Problemi:

- condizioni sufficienti su f in modo che esista (e sia unica) una soluzione $y : I(t_0) \to \mathbb{R}$;
- determinare “quanto è grande” $I(t_0)$

Teorema di esistenza e unicità locale

Sia $A = I \times \mathcal{Y}$. Se

$$\bullet\ f : A \to \mathbb{R} \ \text{ è continua su } A \tag{1}$$

$$\begin{aligned} &\bullet\ f : A \to \mathbb{R} \ \text{ è derivabile risp. a } y \text{ su } A \\ &\frac{\partial f}{\partial y} : A \to \mathbb{R} \ \text{ è continua su } A \end{aligned} \tag{2}$$

allora per ogni $(t_0, y_0) \in A$

$$\exists \delta > 0 \ \exists!\, u : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \to \mathbb{R} \ \text{ di classe } C^1$$

soluz. del problema di Cauchy

<u>Osservazioni:</u>

- La (2) può essere indebolita: sufficiente che

$$\exists\, L > 0 \ : \ |f(t, y_1) - f(t, y_2)| \le L|y_1 - y_2| \quad \forall\, (t, y_1),\, (t, y_2) \in A.$$

cioè $y \mapsto f(t, y)$ ha rapporto increment. limitato

- **unicità:** ogni altra soluz. su $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ coincide con u.

• Inoltre se $v : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \to \mathbb{R}$ risolve

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_1 \end{cases}$$

i grafici di u e di v **NON** si intersecano mai:

$$u(t) < v(t) \quad \forall\, t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta],$$

oppure

$$u(t) > v(t) \quad \forall\, t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta].$$

Infatti, se esistesse $\bar{t} \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ con

$$u(\bar{t}) = v(\bar{t}) = \bar{y},$$

il prob. di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(\bar{t}) = \bar{y} \end{cases}$$

avrebbe **DUE** soluzioni locali!!!

• nelle ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale, si può prolungare la soluzione, definendo l'*intervallo massimale di esistenza*

$$(T_{\text{min}}, T_{\text{max}}),$$

$$T_{\text{max}} = \sup\{T : \text{ soluz. esiste in } [t_0, T]\}$$

$$T_{\text{min}} = \inf\{T : \text{ soluz. esiste in } [T, t_0]\}$$

Teorema di esistenza globale

Sia

$$\mathcal{Y} = \mathbb{R} \quad \text{e quindi} \quad A = I \times \mathbb{R}.$$

Se valgono

- le ipot. del teor. di esistenza e unicità locale,
- e inoltre

$$\exists k_1,\, k_2 \geq 0 \ : \quad |f(t,y)| \leq k_1 + k_2|y| \ \forall\, t \in I, \quad (3)$$

allora per ogni $(t_0, y_0) \in A$ **la** soluzione del corrispondente problema di Cauchy è definita **su tutto** I.

<u>Osservazione:</u>

- sufficiente che la (3) valga lungo la soluzione: se u è soluzione locale su $(T_{\text{min}}, T_{\text{max}})$ e

$$\exists k_1,\, k_2 \geq 0 \ : \ |f(t,u(t))| \leq k_1 + k_2|u(t)| \ \forall\, t \in (T_{\text{min}}, T_{\text{max}}),$$

allora

$$(T_{\text{min}}, T_{\text{max}}) = I.$$