Esercizio 10

Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \text{arctan}(y) \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

Dimostare che la soluzione y

(1) è definita su tutto $\mathbb{R}$;

(2) è strettamente monotona per $\alpha \neq 0$;

(3) è convessa se $\alpha > 0$, concava se $\alpha < 0$;

(4) nel caso $\alpha \geq 0$, calcolare

$$\lim_{t \to -\infty} y(t) \quad \text{e} \quad \lim_{t \to +\infty} y(t).$$

Esistenza e unicità locale: si ha che

$$f(t,y) = \text{arctan}(y)$$

è di classe C^1 in $\mathbb{R}^2$. Quindi (teor. $\exists!$ locale)

esiste ed è unica la soluz. loc. $y : [-\delta, \delta] \to \mathbb{R}$.

Esistenza globale: poiché

$$|f(t,y)| = |\,\text{arctan}(y)| \leq \frac{\pi}{2} \quad \forall\,(y,t) \in \mathbb{R}^2\,,$$

grazie al teor. di $\exists$ globale si ha che

intervallo massimale di esistenza è $[T_{\text{min}}, T_{\text{max}}] = \mathbb{R}$

Soluzioni stazionarie:

$$\text{arctan}(y) = 0 \;\Leftrightarrow\; y = 0.$$

Allora

$\Rightarrow$ unica soluzione stazionaria: $\bar{y}(t) \equiv 0\ \forall\, t \in \mathbb{R}$.

Quindi, ragionando per confronto

(a) $\alpha = 0 \;\Rightarrow y(t) \equiv 0\ \forall\, t \in \mathbb{R}$;

(b) $\alpha > 0 \;\Rightarrow y(t) > 0\ \forall\, t \in \mathbb{R}$;

(c) $\alpha < 0 \;\Rightarrow y(t) < 0\ \forall\, t \in \mathbb{R}$.

Osservazione: per $\alpha \neq 0$,

♣ y non è dispari, in quanto $y(0) = \alpha \neq 0$ e y è continua in 0;

♣ y non è pari: la funzione $z(t) = y(-t)$ infatti risolve

$$z'(t) = -y'(-t) = -\arctan(y(-t)) = -\arctan(z(t))$$

cioè una diversa equazione!

Segno della derivata: si ha

$$\arctan y > 0 \;\Leftrightarrow\; y > 0.$$

Poichè

$$y'(t) = \arctan(y(t)) \text{ e } \begin{cases} y(t) > 0 \;\forall\, t \in \mathbb{R} & \text{se } \alpha > 0, \\ y(t) < 0 \;\forall\, t \in \mathbb{R} & \text{se } \alpha < 0, \end{cases}$$

concludiamo

$$\begin{cases} y'(t) > 0 \;\forall\, t \in \mathbb{R} & \Rightarrow y \text{ strett. cresc.} & \text{se } \alpha > 0, \\ y'(t) < 0 \;\forall\, t \in \mathbb{R} & \Rightarrow y \text{ strett. decresc.} & \text{se } \alpha < 0. \end{cases}$$

Segno della derivata seconda: per studiare concavità e convessità di y, dobbiamo calcolare la derivata seconda di y.

Dall'equazione e dalla formula per la derivata della funzione composta segue

$$
\begin{aligned}
y''(t) = (y'(t))' = (\arctan(y(t)))' &= \frac{1}{1+y^2(t)} y'(t) \\
&= \frac{\arctan(y(t))}{1+y^2(t)}.
\end{aligned}
$$

Dunque

$$
y''(t) > 0 \iff \arctan(y(t)) > 0 \iff y(t) > 0
$$

(a) se $\alpha > 0$, si ha $y(t) > 0$ su $\mathbb{R}$ e perciò $y''(t) > 0$ su $\mathbb{R}$: quindi y è convessa su $\mathbb{R}$;

(b) se $\alpha < 0$, si ha $y(t) < 0$ su $\mathbb{R}$ e perciò $y''(t) < 0$ su $\mathbb{R}$: dunque y è concava su $\mathbb{R}$.

<u>Limiti agli estremi</u> per $\alpha \geq 0$.

Se $\alpha = 0$, $y(t) \equiv 0$ e

$$
\lim_{t\to+\infty} y(t) = \lim_{t\to-\infty} y(t) = 0.
$$

Sia $\alpha > 0$. Sappiamo che y è strettamente crescente, quindi

$$\exists \lim_{t\to-\infty} y(t) = a \quad \text{e} \quad \exists \lim_{t\to+\infty} y(t) = b,$$
$$\text{con } 0 \le a < b \le +\infty.$$

- Proviamo che $a = 0$. Infatti, si ha

$$\lim_{t\to-\infty} y'(t) = \lim_{t\to-\infty} \arctan(y(t)) = \arctan(a).$$

Per il teorema dell'asintoto, deve essere

$$\arctan(a) = 0 \;\Rightarrow\; a = 0.$$

- Proviamo che $b = +\infty$. Se per assurdo fosse $0 < b < +\infty$ si avrebbe

$$\lim_{t\to+\infty} y'(t) = \lim_{t\to+\infty} \arctan(y(t)) = \arctan(b)$$
$$\text{con } \arctan b > 0,$$

in contraddizione con il teorema dell'asintoto. Assurdo!