Esercizio 11

Studiare al variare di $0 < \alpha < 1$ la soluzione di

$$\begin{cases} y' = 2\sin(y) \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

<u>Esistenza e unicità locale</u>: si ha che

$$f(t,y) = 2\sin(y)$$

è di classe C^1 in $\mathbb{R}^2$. Quindi

esiste ed è unica la soluz. loc. $y : [-\delta, \delta] \to \mathbb{R}$.

<u>Esistenza globale</u>: poiché

$$|f(t,y)| = 2|\sin(y)| \le 2 \quad \forall\, (y,t) \in \mathbb{R}^2\,,$$

si ha che

intervallo massimale di esistenza è $[T_{\min}, T_{\max}] = \mathbb{R}$

<u>Soluzioni stazionarie</u>:

$$2\sin(y) = 0 \Rightarrow y = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Quindi

$\Rightarrow$ infinite sol. stazionarie: $y_k(t) \equiv k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ $\forall\, t \in \mathbb{R}$.

Siccome

$$0 < y(0) = \alpha < 1 < \pi$$

per confronto abbiamo

$$0 < y(t) < \pi \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

<u>Segno della derivata</u>: poiché

$$y'(t) = 2\sin(y(t)) \text{ e } y(t) \in (0,\pi)\ \forall\, t \in \mathbb{R},$$

si ha

$$y'(t) > 0 \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

quindi

y è strettamente crescente su $\mathbb{R}$ $\forall\, 0 < \alpha < 1$.

<u>Limiti</u>: per monotonia

$\exists \lim_{t\to-\infty} y(t) = a \in [0,\alpha)$, $\exists \lim_{t\to+\infty} y(t) = b \in (\alpha,\pi]$.

- Proviamo che $a = 0$. Infatti, si ha

$$\lim_{t\to-\infty} y'(t) = \lim_{t\to-\infty} 2\sin(y(t)) = 2\sin(a).$$

Per il teorema dell'asintoto, deve essere

$$\sin(a) = 0$$

e necessariamente, visto che $0 \leq a < \pi$, deve essere $a = 0$.

- Proviamo che $b = \pi$. Infatti, si ha

$$\lim_{t \to +\infty} y'(t) = \lim_{t \to +\infty} 2\sin(y(t)) = 2\sin(b).$$

Per il teorema dell'asintoto, deve essere

$$\sin(b) = 0$$

e necessariamente, visto che $0 < b \leq \pi$, deve essere $b = \pi$.

Segno della derivata seconda:

$$\begin{aligned} y''(t) = (y'(t))' &= 2(\sin(y(t)))' \\ &= 2(\cos(y(t)))y'(t) \\ &= 2\cos(y(t))\sin(y(t)) \\ &= \sin(2y(t)). \end{aligned}$$

Per $0 < y < \pi$ si ha che

$$\sin(2y) > 0 \quad \text{per } 0 < y < \frac{\pi}{2}$$

e

$$\sin(2y) < 0 \quad \text{per } \frac{\pi}{2} < y < \pi.$$

Quindi

$$\begin{cases} y''(t) > 0 & \text{se } 0 < y(t) < \frac{\pi}{2}, \\ y''(t) < 0 & \text{se } \frac{\pi}{2} < y(t) < \pi. \end{cases}$$

Combinando

$$\lim_{t\to-\infty} y(t) = 0 \text{ e } \lim_{t\to+\infty} y(t) = \pi$$

con il teorema dei valori intermedi, si ha

$$\text{esiste un solo } \bar{t} \in \mathbb{R} \text{ tale che } y(\bar{t}) = \frac{\pi}{2}$$

(unico perché y è strettamente crescente).

♣ Concludiamo che

$y''(t) > 0 \quad$ per $t \in (-\infty, \bar{t}) \quad$ (y è convessa),

$y''(\bar{t}) = 0$ (unico punto di flesso) e

$y''(t) < 0 \quad$ per $t \in (\bar{t}, +\infty) \quad$ (y è concava).