Esercizio 12

Dimostrare che il dominio massimale $[T_{\text{min}}, T_{\text{max}}]$ della soluzione di

$$\begin{cases} y' = y^2 + t^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

non è tutto $\mathbb{R}$.

<u>Esistenza e unicità locale</u>: si ha che

$$f(t, y) = y^2 + t^2$$

è di classe C^1 in $\mathbb{R}^2$. Quindi

esiste ed è unica la soluz. loc. $y : [-\delta, \delta] \to \mathbb{R}$.

♠ La funz. $y \mapsto f(t, y)$ ha crescita quadratica: <u>non</u> possiamo applicare il teor. di esist. globale.

<u>Segno della derivata</u>:

$$y'(t) = y^2(t) + t^2 > 0 \quad \forall\, t \in [T_{\text{min}}, T_{\text{max}}] \setminus 0$$

vediamo che

$$\begin{cases} y \text{ è strettam. crescente} & \text{su } [T_{\text{min}}, 0] \\ y \text{ è strettam. crescente} & \text{su } [0, T_{\text{max}}]. \end{cases}$$

<u>Proviamo</u> che

$$T_{\text{max}} < +\infty$$

il che conclude la dimostrazione del fatto che il dominio massimale non è $\mathbb{R}$.

- Per assurdo sia $T_{\text{max}} = +\infty$. Per monotonia

$$\exists \lim_{t \to +\infty} y(t) = b \in (0, +\infty].$$

Osserviamo

$$y'(t) \geq t^2 \quad \forall\, t \in [0, +\infty)$$
$$\Rightarrow \;\; y(t) - y(0) = y(t) \geq \frac{1}{3} t^3 \quad \forall\, t \in [0, +\infty)$$

e concludiamo

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = +\infty.$$

- Dall'equazione segue che

$$\frac{y'(t)}{y^2(t) + t^2} = 1$$

quindi integrando sul generico intervallo $[1, M]$

$$\int_1^M \frac{y'(t)}{y^2(t)+t^2}\,\mathrm{d}t = M-1.$$

D'altra parte, si ha

$$\begin{aligned}\int_1^M \frac{y'(t)}{y^2(t)+t^2}\,\mathrm{d}t &\le \int_1^M \frac{y'(t)}{y^2(t)}\,\mathrm{d}t\\ &= \left[-\frac{1}{y(t)}\right]_1^M\\ &= -\frac{1}{y(M)}+\frac{1}{y(1)}.\end{aligned}$$

- Si ha

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = +\infty \ \Rightarrow \lim_{M\to+\infty}\frac{1}{y(M)} = 0$$

quindi

$$\lim_{M\to+\infty}\int_1^M \frac{y'(t)}{y^2(t)+t^2}\,\mathrm{d}t \le \lim_{M\to+\infty}\int_1^M \frac{y'(t)}{y^2(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{y(1)}.$$

- Questo è in contraddizione con

$$\lim_{M\to+\infty}\int_1^M \frac{y'(t)}{y^2(t)+t^2}\,\mathrm{d}t = \lim_{M\to+\infty}(M-1) = +\infty.$$

Assurdo! Deve essere $T_{\mathrm{max}} < +\infty$!!