Esercizi su derivate direzionali e differenziabilità

Esercizio 1. Siano $\beta > 1$, $\mathbf{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^{\beta-1}y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases} \tag{1}$$

Al variare di $\beta > 1$, determinare se esiste $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(0,0)$, e, in caso affermativo, calcolarla.

Svolgimento. Calcolo $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(0,0)$ usando direttamente la definizione

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f((0,0)+h\mathbf{v}) - f(0,0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(h\mathbf{v}) - 0}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f\left(\dfrac{h}{\sqrt{2}}, \dfrac{h}{\sqrt{2}}\right)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{|h|^{\beta-1}\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^{\beta-1}\frac{h}{\sqrt{2}}}{h^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\beta} \frac{|h|^{\beta-1}}{h^2} \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\beta} \lim_{h\to 0} |h|^{\beta-3} = \begin{cases} \nexists & \text{se } \beta < 3, \\ = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} & \text{se } \beta = 3, \\ = 0 & \text{se } \beta > 3. \end{cases}
\end{aligned}$$

Esercizio assegnato. Al variare di $\beta > 1$, studiare la continuità in $(0,0)$ della funzione (1). Studiarne quindi, al variare di $\beta > 1$, la differenziabilità (tenere conto dello schema proposto nel seguente Esercizio 5).

Esercizio 2. Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) & \text{se } x \neq 0, \\ \dfrac{13}{2}\pi & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Stabilire se esistono (e, in caso affermativo, calcolare) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(0,0)$ rispetto a $\mathbf{v} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

Svolgimento. Si osservi che la restrizione di f all'asse y assume costantemente il valore $\frac{13}{2}\pi$. Ne concludiamo che $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ (**esercizio**: verificare che $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ usando la definizione di derivata parziale rispetto a y!!).
Calcoliamo $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ usando la definizione:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\arctan\left(\dfrac{0}{h}\right) - \dfrac{13}{2}\pi}{h} = -\frac{13}{2}\pi \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}$$

e si noti che l'ultimo limite NON ESISTE.
Calcoliamo $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(0,0)$ usando la definizione:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f\left(\frac{h}{\sqrt{2}}, \frac{h}{\sqrt{2}}\right) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\arctan\left(\frac{\frac{h}{\sqrt{2}}}{\frac{h}{\sqrt{2}}}\right) - \frac{13}{2}\pi}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\pi}{4} - \frac{13}{2}\pi}{h}$$

e si noti che l'ultimo limite NON ESISTE.

Esercizio 3. Si indichi il dominio della funzione

$$f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

e si determinino i punti $P = (x_0, y_0)$ sulla bisettrice del primo e del terzo quadrante tali che $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x_0, y_0) = 1$, con $\mathbf{v} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

Svolgimento. Osserviamo che

$$\mathrm{dom}(f) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq 4\right\},$$

cioè il disco chiuso (o palla chiusa) di centro $(0,0)$ e raggio 2. Inoltre f è continua su $\mathrm{dom}(f)$ in quanto è data dalla composizione di funzioni continue.
Calcoliamo ora, per gli $(x,y) \in \mathrm{dom}(f) \setminus \mathcal{C}$ (ove $\mathcal{C}$ è la circonferenza $x^2 + y^2 = 4$), le derivate parziali

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{4 - x^2 - y^2}\right) = -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{4 - x^2 - y^2}\right) = -\frac{y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}. \end{aligned}$$

Osserviamo che $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ sono continue su $\mathrm{dom}(f) \setminus \mathcal{C}$. Per il teorema del differenziale totale, concludiamo che f è differenziabile su $\mathrm{dom}(f) \setminus \mathcal{C}$ e che

$$\nabla f(x,y) = \left(-\frac{x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}\right) \qquad \forall\,(x,y) \in \mathrm{dom}(f) \setminus \mathcal{C}\,.$$

Quindi

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x+y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}\right) \qquad \forall\,(x,y) \in \mathrm{dom}(f) \setminus \mathcal{C}\,.$$

Ora determiniamo i punti $P = (x_0, y_0)$ sulla bisettrice del primo e del terzo quadrante (quindi $y_0 = x_0$) imponendo che

$$1 = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x_0, y_0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x_0 + y_0}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}\right) = -\sqrt{2}\,\frac{x_0}{\sqrt{4 - 2x_0^2}},$$

da cui otteniamo

$$-\sqrt{2}x_0 = \sqrt{4 - 2x_0^2}$$

o, equivalentemente,

$$\begin{cases} x_0 < 0, \\ 2x_0^2 = 4 - 2x_0^2. \end{cases}$$

Quindi $x_0 = -1$, e troviamo l'unico punto $P_0 = (-1, -1)$.

Esercizio 4. Sia $\alpha > 0$ e si considerino l'insieme

$$E_\alpha = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le y < \alpha x\}$$

e la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{se } (x,y) \in E_\alpha, \\ x^2 - xy & \text{se } (x,y) \notin E_\alpha. \end{cases}$$

Dato il versore $\mathbf{v} = \left(\frac{11}{\sqrt{170}}, \frac{7}{\sqrt{170}}\right)$, determinare per quali $\alpha > 0$ la funzione f è derivabile in $(0,0)$ rispetto alla direzione $\mathbf{v}$.

Svolgimento. Notiamo che $f(0,0) = 0$. Calcoliamo $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(0,0)$ usando la definizione

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f\left(h\frac{11}{\sqrt{170}}, h\frac{7}{\sqrt{170}}\right)}{h} \dots$$

Ora si noti che il punto $P_h = \left(h\frac{11}{\sqrt{170}}, h\frac{7}{\sqrt{170}}\right)$ appartiene a E_α se e solo se

$$\alpha > \frac{7}{11} \quad \text{e} \quad h > 0\,.$$

Quindi distinguiamo due casi:

- se $0 < \alpha \le \frac{7}{11}$: allora $P_h = \left(h\frac{11}{170}, h\frac{7}{170}\right) \notin E_\alpha$ per ogni $h \in \mathbb{R}$. Quindi

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f\left(h\frac{11}{\sqrt{170}}, h\frac{7}{\sqrt{170}}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2\frac{121}{170} - h^2\frac{77}{170}}{h} = 0$$

- se $\alpha > \frac{7}{11}$, allora per $h > 0$ il punto $P_h = \left(h\frac{11}{170}, h\frac{7}{170}\right) \in E_\alpha$. Quindi

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f\left(h\frac{11}{\sqrt{170}}, h\frac{7}{\sqrt{170}}\right)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{h\frac{11}{\sqrt{170}}}}{h} = +\infty,$$

  mentre

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f\left(h\frac{11}{\sqrt{170}}, h\frac{7}{\sqrt{170}}\right)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h^2\frac{121}{170} - h^2\frac{77}{170}}{h} = 0.$$

  Concludiamo che

$$\nexists \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(0,0).$$

Esercizio 5. Studiare la continuità e la differenziabilità di

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(x^2 + y^2\right)^\alpha & (x,y) \ne (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

per

1. $\alpha = 4/7$,
2. $\alpha = -2/5$,
3. $\alpha = 3/8$.

Osservazioni generali sullo studio della differenziabilità di f in un punto x^0:

- se le funzioni
$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_N} \quad \text{sono continue in } x^0$$
allora
$$f \text{ è differenziabile in } x^0$$
(per il teorema del differenziale totale!)

- se per qualche $i \in \{1, 2, \dots, N\}$
$$\nexists \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)$$
allora
$$f \text{ NON è differenziabile in } x^0$$
(in effetti, non è definito $\nabla f(x^0)$, che è l'unico vettore candidato a verificare la definizione di differenziabilità!)

- se
$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_N}$$
sono definite ma non tutte continue in x^0

NON SI PUÒ CONCLUDERE NULLA, è necessario studiare la differenziabilità mediante la definizione!

Svolgimento dell'Esercizio 5. Si noti che in tutti e tre i casi f è differenziabile su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

2. $\alpha = -2/5$. Passando alle coordinate polari, osservo che
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{(x^2+y^2)^{2/5}} = \lim_{\rho\to 0} \frac{1}{\rho^{4/5}} = +\infty$$
quindi f non è continua in $(0,0)$, quindi neppure differenziabile.

1. $\alpha = 4/7$. Osservo che
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{4/7} = 0$$
quindi f è continua in $(0,0)$. Mi pongo il problema della differenziabilità, e calcolo quindi (se esiste) il vettore $\nabla f(0,0)$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{[(0+h)^2+0^2]^{4/7} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^{8/7}}{h} = 0$$
Con lo stesso conto, si vede che
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$
Ora verifico se $\nabla f(0,0) = (0,0)$ soddisfa la definizione di differenziabilità
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot(x,y)}{\|(x,y)\|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left(x^2+y^2\right)^{4/7}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x^2+y^2\right)^{1/14} = 0$$
quindi f è differenziabile in $(0,0)$.

Modo alternativo: osservare che
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{8}{7}x\left(x^2+y^2\right)^{-3/7} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{8}{7}y\left(x^2+y^2\right)^{-3/7} \end{cases} \quad \forall\,(x,y) \neq (0,0)$$
e che le funzioni
$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \text{ sono continue in } (0,0).$$
Quindi f è differenziabile in $(0,0)$ per il teorema del differenziale totale.

3. $\alpha = 3/8$. Osservo che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{3/8} = 0$$

quindi $\underline{f \text{ è continua in } (0,0)}$. Mi pongo il problema della differenziabilità: calcolo

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{[(0+h)^2+0^2]^{3/8}-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^{3/4}}{h} = +\infty$$

Quindi $\nabla f(0,0)$ NON è definito. Allora f NON è differenziabile in $(0,0)$.