Esercizi su estremi vincolati e assoluti

Esercizio 1. Determinare i punti di minimo e di massimo (e i relativi valori di minimo e massimo) assoluto di

$$f(x,y) = x^2 - \cos(\pi y)$$

sul quadrato

$$Q = [0,1] \times [0,1].$$

Svolgimento. Ricerco i punti di estremo assoluto nel quadrato aperto $(0,1)\times(0,1)$ fra i punti di annullamento del gradiente di f. Le soluzioni in Q del sistema

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ \pi\sin(\pi y) = 0 \end{cases}$$

sono i punti $O = (0,0)$ e $P = (0,1)$, che non appartengono a $(0,1)\times(0,1)$. Quindi f non ha punti stazionari (e quindi neppure di estremo) nell'interno di Q.

I punti di estremo relativo andranno cercati fra i punti sul bordo ∂Q del quadrato, dato dall'unione dei quattro segmenti:

$$\partial Q = [A,B] \cup [B,C] \cup [C,D] \cup [D,A]$$

con $A = (0,0)$, $B = (1,0)$, $C = (1,1)$ e $D = (0,1)$. Ora osserviamo che

- il segmento $[A,B]$ è parametrizzato da $0 \le x \le 1$ e $y = 0$, quindi la restrizione di f ad $[A,B]$ è
$$f(x,0) = x^2 - 1 \quad \text{for } x \in [0,1].$$
Essendo tale funzione strettamente crescente su $[0,1]$, concludiamo che essa ha un punto di minimo assoluto per $x = 0$ (da cui il punto $(0,0)$) e un punto di massimo assoluto per $x = 1$ (da cui il punto $(1,0)$).
- Il segmento $[B,C]$ è parametrizzato da $0 \le y \le 1$ e $x = 1$, quindi la restrizione di f ad $[A,B]$ è
$$f(1,y) = 1 - \cos(\pi y) \quad \text{for } y \in [0,1].$$
Essendo tale funzione strettamente crescente su $[0,1]$, concludiamo che essa ha un punto di minimo assoluto per $y = 0$ (da cui il punto $(1,0)$) e un punto di massimo assoluto per $y = 1$ (da cui il punto $(1,1)$).
- Il segmento $[C,D]$ è parametrizzato da $0 \le x \le 1$ e $y = 1$, quindi la restrizione di f ad $[A,B]$ è
$$f(x,1) = x^2 + 1 \quad \text{for } x \in [0,1].$$
Essendo tale funzione strettamente crescente su $[0,1]$, concludiamo che essa ha un punto di minimo assoluto per $x = 0$ (da cui il punto $(0,1)$) e un punto di massimo assoluto per $x = 1$ (da cui il punto $(1,1)$).
- Il segmento $[D,A]$ è parametrizzato da $0 \le y \le 1$ e $x = 0$, quindi la restrizione di f ad $[D,A]$ è
$$f(0,y) = -\cos(\pi y) \quad \text{for } y \in [0,1].$$
Essendo tale funzione strettamente crescente su $[0,1]$, concludiamo che essa ha un punto di minimo assoluto per $y = 0$ (da cui il punto $(0,0)$) e un punto di massimo assoluto per $y = 1$ (da cui il punto $(0,1)$).

Confrontando i valori assunti da f nei punti $A = (0,0)$, $B = (1,0)$, $C = (1,1)$ e $D = (0,1)$, concludiamo che

$$\begin{aligned} A = (0,0) &\text{ è il punto di minimo assoluto di } f, \text{ con } f(0,0) = -1, \\ B = (1,1) &\text{ è il punto di massimo assoluto di } f, \text{ con } f(1,1) = 2. \end{aligned}$$

Osservazione: se nel testo dell'esercizio fossero solo stati richiesti i valori di minimo e massimo assoluto, sarebbe stato sufficiente osservare che

$$f(x,y) = x^2 - \cos(\pi y) \leq x^2 - (-1) \leq 1 + 1 = f(1,1) \quad \forall\,(x,y) \in [0,1] \times [0,1],$$
$$f(x,y) = x^2 - \cos(\pi y) \geq -\cos(\pi y) \geq -1 = f(0,0) \quad \forall\,(x,y) \in [0,1] \times [0,1].$$

Esercizio 2. Determinare i punti di massimo e minimo assoluto di

$$f(x,y) = x^2y - xy^2 + xy$$

sul triangolo

$$T = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x \leq 0,\; y \geq 0,\; x - y \geq -1\right\}.$$

Svolgimento. Ricerco i punti di estremo libero nell'interno di T (cioè nell'insieme $T \setminus \partial T$), determinando i punti di annullamento di $\nabla f(x,y) = (2xy - y^2 + y, x^2 - 2xy + x)$

$$\begin{cases} y(2x - y + 1) = 0 \\ x(x - 2y + 1) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y = 0 \;\text{ o }\; 2x - y + 1 = 0 \\ x = 0 \;\text{ o }\; x - 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

da cui si ottengono i punti stazionari $O = (0,0)$, $P_1 = (0,1)$, $P_2 = (-1,0)$ e $P_3 = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Si noti che P_3 è l'unico punto stazionario in $T \setminus \partial T$. Lo classifico calcolando la matrice hessiana

$$H\,(x,y) = \begin{bmatrix} 2y & 2x - 2y + 1 \\ 2x - 2y + 1 & -2x \end{bmatrix},$$

e quindi

$$H\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix},$$

il cui determinante è strettamente positivo. Ne concludiamo che $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ è un punto di minimo relativo interno a T.

Ricerco i punti di estremo relativo di $f(x,y)$ sul vincolo

$$\partial T = L_1 \cup L_2 \cup L_3,$$

con

$$L_1 = [-1,0] \times \{0\}, \quad L_2 = \{0\} \times [0,1], \quad L_3 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; y = x + 1,\; x \in [-1,0]\right\}.$$

Osserviamo che

$$f(x,y) = 0 \quad \forall\,(x,y) \in \partial T$$

e che

$$f(x,y) < 0 \qquad \forall\,(x,y) \in T \setminus \partial T$$

Ne concludiamo che tutti i punti di ∂T sono di massimo assoluto per f, e che il valore di massimo assoluto per f su T è 0. Il punto $P_3 = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ è di minimo assoluto per f, e il valore di minimo assoluto è $f(P_3) = -\frac{1}{27}$.

Osservazione. Si noti che negli Esercizi 1 e 2 non sarebbe possibile risolvere il problema degli estremi vincolati

- né con il metodo delle curve di livello, in quanto non sarebbe facile capire il luogo geometrico rappresentato dalle curve di livello $x^2 - \cos(\pi y) = k$ e $x^2y - xy^2 + xy = k$,
- né con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, in quanto in entrambi i casi non esiste alcuna funzione g di classe C^1 tramite la quale si possa rappresentare il vincolo.

Esercizio 3. Determinare i punti di minimo e massimo assoluto di

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x + 2$$

nell'insieme

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq 4\}\,.$$

Svolgimento. Si noti che D è il disco di centro $(0,0)$ e raggio 2.
Uso il metodo delle curve di livello, cioè le curve

$$x^2 + y^2 - 2x + 2 = k \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2 + y^2 = k - 1$$

al variare di $k \geq 1$ (per $k < 1$ il luogo geometrico summenzionato è dato dall'insieme vuoto). Si noti che $(x-1)^2 + y^2 = k - 1$ è la circonferenza di centro $(1,0)$ e raggio $r = \sqrt{k-1}$. Ricerco

- il minimo valore $k_{\min}$ tale che la circonferenza $(x-1)^2 + y^2 = k_{\min} - 1$ intersechi D e il massimo valore $k_{\max}$ tale che la circonferenza $(x-1)^2 + y^2 = k_{\max} - 1$ intersechi D

Chiaramente, $k_{\min}$ e $k_{\max}$ saranno, rispettivamente, il minimo e il massimo valore assunti da f in D. Si ha che

- $k_{\min} = 1$, in corrispondenza alla circonferenza degenere di centro $(1,0)$ e raggio 0. Tale circonferenza si riduce ovviamente al solo punto $(1,0)$. Quindi 1 è il valore di minimo assoluto, e $(1,0)$ il punto di minimo assoluto.

- Si trova $k_{\max}$ ricercando il massimo valore di k per il quale il sistema

  $$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = k_{\max} - 1 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

  ha una soluzione $(\bar{x}, \bar{y})$. Mettendo a sistema le due equazioni, si trova

  $$4 - 2\bar{x} + 2 = k,$$

  da cui

  $$k_{\max} = \max_{\bar{x} \in [-2,2]} (4 - 2\bar{x} + 2) = 4 - 2(-2) + 2 = 10$$

  Quindi il valore di massimo assoluto è $k_{\max} = 10$, assunto nel punto le cui coordinate si trovano risolvendo il sistema

  $$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 2 = 10 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

  da cui si ottiene il punto di massimo assoluto $(-2,0)$.

Esercizio assegnato. Ritrovare lo stesso risultato nel seguente modo:

1. ricerco i punti di estremo liberi in $D \setminus \partial D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 < 4\}$ fra i punti stazionari di f. Trovo che $(1,0)$ è l'unico punto stazionario di f in $D \setminus \partial D$. Lo classifico con il test della matrice hessiana.

2. Studio i punti di estremo relativo per f vincolati alla cinrconferenza $x^2 + y^2 = 4$ con i seguenti metodi (**provare a sviluppare tutti e tre i metodi!!**):

   (a) moltiplicatori di Lagrange: la Lagrangiana è

   $$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - 2x + 2 - \lambda(x^2 + y^2 - 4)$$

   si noti che in questo modo si troveranno i due punti $(2,0)$, $(-2,0)$ che poi si dovrà confrontare

(b) esplicitando nel vincolo y in funzione di x: conviene esplicitare y^2 in funzione di x perché y appare nell'espressione di f solo come y^2

$$y^2 = 4 - x^2, \quad x \in [-2, 2]$$

e quindi mi riduco a studiare la funzione

$$h(x) = f(x, y(x)) = 4 - 2x + 2, \quad x \in [-2, 2]$$

(c) usando l'equazione parametrica di $x^2 + y^2 = 4$....

Esercizio 4. Al variare di $\beta \in [0, +\infty)$, determinare i punti di estremo assoluto di

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 1$$

nel dominio $R_\beta = [0, 2] \times [0, 7\beta]$.

Svolgimento. Esaminiamo dapprima il caso $\underline{\beta = 0}$. R_0 degenera nel segmento $[0, 2] \times \{0\}$ sull'asse x. Allora è sufficiente studiare i punti di estremo della funzione

$$h(x) = f(x, 0) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 \quad \forall\, x \in [0, 2].$$

Si vede immediatamente che $x = 1$ (e quindi il punto $(1, 0)$) è il punto di minimo assoluto di h, e che $x = 0$ e $x = 2$ sono i punti di massimo assoluti per h. I valori di minimo e di massimo assoluto sono $m_0 = 0$ e $M_0 = 1$.
Esaminiamo ora il caso $\underline{\beta > 0}$. Utilizziamo il metodo delle curve di livello

$$x^2 + y^2 - 2x + 1 = k \quad \Leftrightarrow \quad (x - 1)^2 + y^2 = k$$

cioè le circonferenze di centro $(1, 0)$ e raggio $\sqrt{k}$. Ricerchiamo

- il minimo valore $k_{\min}$ tale che la circonferenza $(x - 1)^2 + y^2 = k_{\min}$ intersechi R_β e il massimo valore $k_{\max}$ tale che la circonferenza $(x - 1)^2 + y^2 = k_{\max}$ intersechi R_β.

Si ha che

- $k_{\min} = 0$, in corrispondenza alla circonferenza degenere di centro $(1, 0)$ e raggio 0. Tale circonferenza si riduce ovviamente al solo punto $(1, 0)$. Quindi 0 è il valore di minimo assoluto, e $(1, 0)$ il punto di minimo assoluto.

- Graficamente si vede che $k_{\max}$ corrisponde alla circonferenza passante per i punti $(0, 7\beta)$ e $(2, 7\beta)$. Imponendo che tali punti appartengano alla circonferenza $(x - 1)^2 + y^2 = k_{\max}$, si trova la condizione

  $$k_{\max} = 1 + 49\beta^2\,,$$

  che individua il valore di massimo assoluto assunto da f su R_β. I corrispondenti punti di massimo assoluto sono $(0, 7\beta)$ e $(2, 7\beta)$.

Esercizio assegnato. Ritrovare lo stesso risultato nel seguente modo:

1. ricerco i punti di estremo liberi nell'interno di R_β, cioè in $(0, 2) \times (0, 7\beta)$, fra i punti stazionari di f. Trovo che non esistono punti stazionari interni.
2. Studio i punti di estremo relativo per f vincolati al bordo di R_β, studiando le restrizioni di f a ciascuno dei quattro lati di R_β.

Si noti che anche in questo caso non è possibile usare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange in quanto non esiste alcuna funzione g di classe C^1 tramite la quale si possa rappresentare il vincolo.

Esercizio 5. Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ determinare i punti di estremo relativo di

$$f(x,y) = \sin(y - \alpha x)$$

nell'insieme

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x < 0, \; 0 \le y \le -\frac{1}{x} e^x \right\}.$$

Svolgimento. Si osservi che

$$\lim_{x \to 0^-} \left(-\frac{1}{x} e^x \right) = +\infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} \left(-\frac{1}{x} e^x \right) = 0.$$

Quindi l'insieme A non è limitato (e non è neppure chiuso). L'esistenza di punti di estremo assoluto per f in A non è più garantita dal teorema di Weierstrass, che non si applica in questo caso.

Tuttavia, osserviamo che

$$-1 \le f(x,y) = \sin(y - \alpha x) \le 1 \qquad \forall \, (x,y) \in A$$

e che

$$\sin(y - \alpha x) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad y - \alpha x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$
$$\sin(y - \alpha x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad y - \alpha x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Quindi per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ esistono <u>infiniti punti di</u>

$$\begin{cases} \text{minimo assoluto per } f \text{ in } A\text{: i punti di } A \text{ sulle rette } y = \alpha x - \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \text{ al variare di } k \in \mathbb{Z}, \\ \text{massimo assoluto per } f \text{ in } A\text{: i punti di } A \text{ sulle rette } y = \alpha x + \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \text{ al variare di } k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Esercizio 6. Determinare i punti di estremo assoluto di

$$f(x,y) = 3y|x+y|$$

sul quadrato $Q = [-1,1] \times [-1,1]$.

Svolgimento. <u>Passo 1:</u> "elimino" il modulo. Considero i due triangoli

$$Q^+ = \{(x,y) \in [-1,1] \times [-1,1] \, : \, y \ge -x\}, \quad Q^- = \{(x,y) \in [-1,1] \times [-1,1] \, : \, y \le -x\},$$

e osservo che $Q = Q^+ \cup Q^-$, che

$$(x,y) \in Q^+ \quad \Leftrightarrow \quad (-x,-y) \in Q^-$$

(cioè i due insiemi sono simmetrici rispetto a $(0,0)$), e, denotando con $f|_{Q^+}$ e $f|_{Q^-}$ le restrizioni di f a Q^+ e a Q^-, si ha che

$$f|_{Q^+}(x,y) = -f|_{Q^-}(-x,-y) \qquad \forall \, (x,y) \in Q^+. \tag{1}$$

Allora è sufficiente studiare i punti di estremo assoluto per $f|_{Q^+}$ e poi, tenendo conto di (1), dedurre risultati su tutto Q.

Ora si noti che

$$f|_{Q^+}(x,y) = 3y(x+y) = 3yx + 3y^2 \qquad \forall \, (x,y) \in Q^+.$$

Ricerco i punti stazionari interni a Q^+ risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 3y = 0 \\ 6y = 0 \end{cases}$$

da cui trovo che tutti i punti dell'asse x sono stazionari per la funzione $(x, y) \mapsto 3yx + 3y^2$. Quindi i punti stazionari interni a Q^+ sono i punti di $S = (0, 1) \times \{0\}$. Osservando che $f(x, 0) = 0$ per ogni $(x, 0) \in S$, per classificare i punti di S è sufficiente studiare il segno di $(x, y) \mapsto 3yx + 3y^2$. Da questo si vede che

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 0 \qquad \forall\,(x,y) \in L_1 = \{(x,y) \in Q^+ \,:\, y = -x\}, \\ f(x,y) &\leq 0 \qquad \forall\,(x,y) \in Q^+ \ \text{ tali che } \ y \leq 0, \\ f(x,y) &\geq 0 \qquad \forall\,(x,y) \in Q^+ \ \text{ tali che } \ y \geq 0, \end{aligned}$$

e che quindi i punti di S sono tutti punti di sella per f.

Ricerco i punti di estremo assoluto per f su $\partial Q^+ = L_1 \cup L_2 \cup L_3$, con

$$L_2 = \{(x,y) \in Q^+ \,:\, x = 1\}, \qquad L_3 = \{(x,y) \in Q^+ \,:\, y = 1\}.$$

Essendo f identicamente nulla su L_1 e strettamente positiva/strettamente negativa altrove, escludo di trovare dei punti di estremo assoluto su L_1. Considerazioni di segno mi portano a ricercare i punti di minimo assoluto su $L_2^- = L_2 = \{(x,y) \in Q^+ \,:\, x = 1,\ y \in [-1, 0]\}$. Osserviamo che

- la restrizione di f a L_2 è

  $$h(y) = f(1, y) = 3y(1 + y) = 3y + 3y^2, \qquad y \in [-1, 1]$$

  il cui punto di minimo assoluto è $y = -\frac{1}{2} \in L_2^-$. Il corrispondente valore di minimo assoluto è $m = -\frac{3}{4}$; il punto di massimo assoluto è $y = 1$, e il corrispondente valore è $M = 6$.
- la restrizione di f a L_3 è

  $$j(x) = f(x, 1) = 3(x + 1) = 3x + 3, \qquad x \in [-1, 1]$$

  il cui punto di minimo assoluto è $x = -1$, in cui la j si annulla ($f(-1, 1) = 0$), mentre il punto di massimo assoluto è $x = 1$, e il corrispondente valore è $M = 6$.

Concludiamo che $(1, 1)$ è il punto di massimo assoluto per f su Q^+ e che $(1, -\frac{1}{2})$ è il punto di minimo assoluto per f su Q^+.

Poiché, a causa di (1), $f(-1, -1) = -f(1, 1) = -6$, concludiamo che il punto di minimo assoluto di f su Q è $(-1, -1)$, mentre $(1, 1)$ è il punto di massimo assoluto di f su Q.

Esercizio 7. Si consideri la funzione

$$f(x, y) = 3x^2 + 3y^2 + 2 \quad \forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Calcolare i valori di minimo e di massimo assoluto di f sul quadrato

$$Q = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, |x| \leq \frac{\sqrt{2}}{2},\ |y| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$$

Svolgimento. Uso le curve di livello:

$$3x^2 + 3y^2 + 2 = k \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 = \frac{k-2}{3}$$

sono cioè le circonferenze di centro $(0,0)$ e raggio $\sqrt{\frac{k-2}{3}}$ (quindi $k \geq 2$). Considero tutti i valori di $k \in [2, +\infty)$ tali che la circonferenza $x^2 + y^2 = \frac{k-2}{3}$ abbia almeno un punto in Q.
Si ha $k_{\min}$ in corrispondenza della circonferenza degenere $x^2 + y^2 = 0$ (che degenera nel punto $(0,0)$), quindi

$$k_{\min} = 2 \quad \Rightarrow \min_Q f = 2$$

e trovo che $(0,0)$ è il punto di minimo assoluto.
Trovo $k_{\max}$ imponendo che Q sia inscritto nella circonferenza $x^2 + y^2 = \frac{k_{\max}-2}{3}$: quindi la condizione è che il punto $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ appartenga alla circonferenza, da cui

$$\frac{k_{\max} - 2}{3} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

da cui

$$k_{\max} = 5 \quad \Rightarrow \max_Q f = 5$$

I quattro punti di massimo assoluto sono i punti di intersezione fra il quadrato e la circonferenza

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$
$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

(si noti che questo è un risultato prevedibile per simmetria, in quanto $f(x,y) = f(-x,y)$ e $f(x,y) = f(x,-y)$).

Esercizio assegnato. Si consideri la funzione

$$f(x,y) = y^2 e^{-x^2} \quad \forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Calcolare i valori di minimo e di massimo assoluto di f sul triangolo

$$T = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; |x| - 2 \leq y \leq 1\right\}$$

Suggerimenti.

– procedere con la ricerca di punti di estremo interni usando il metodo differenziale

– per lo studio dei punti di estremo vincolati a ∂T, non conviene usare le curve di livello

$$y^2 e^{-x^2} = k \;??$$

Conviene osservare che

$$\partial T = S_1 \cup S_2 \cup S_3$$

con

$$\begin{cases} S_1 : \; y = x - 2, \; x \in [0,3] \\ S_2 : \; y = -x - 2, \; x \in [-3,0] \\ S_3 : \; y = 1, \; x \in [-3,3] \end{cases}$$

e studiare le restrizioni di f a S_1, S_2, e S_3.

Metodo alternativo: (per la ricerca di estremi su T) Osservo che

$$f(x,y) = y^2 e^{-x^2} \quad \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$$

è prodotto di due funzioni non negative. Allora

$$\begin{gathered}(x_0, y_0) \;\text{ è punto di massimo per } (x,y) \mapsto y^2 e^{-x^2} \\ \Updownarrow \\ \begin{cases} x_0 \;\text{ è un punto di massimo per } x \mapsto e^{-x^2}, \\ y_0 \;\text{ è un punto di massimo per } y \mapsto y^2, \end{cases}\end{gathered}$$

I punti di T hanno:

$$\begin{cases} \text{ascisse } -3 \le x \le 3, \\ \text{ordinate } -2 \le y \le 1, \end{cases}$$

Quindi i punti di massimo sono .....
Il valore di massimo è....

Idem per la ricerca dei punti di minimo.

N.B.: **fondamentale** che f sia data dal prodotto di due funzioni non negative!! Altrimenti questo metodo non funziona!!
