

Formule di Gauss-Green

Richiami di teoria

- Γ curva chiusa in \mathbb{R}^2 , regolare a tratti, percorsa in senso antiorario
- $T \subset \mathbb{R}^2$ regione "interna" a Γ
- Sia $\vec{F} : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{F} = F_1 \vec{i}_1 + F_2 \vec{i}_2$, $\vec{F} \in C^1(A)$, con A insieme aperto contenente T e il sostegno di Γ

Formule di Gauss-Green

$$(1) \iint_T \frac{\partial F_2}{\partial x} dx dy = \oint_{\Gamma} F_2 dy$$

$$(2) - \iint_T \frac{\partial F_1}{\partial y} dx dy = \oint_{\Gamma} F_1 dx$$

$$(3) \iint_T \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\Gamma} F_1 dx + F_2 dy$$

Casi particolari

1. Area di una regione piana

$$\text{Area}(T) = \oint_{\Gamma} x \, dy$$

(segue da (1) con $F_2(x, y) = x$)

$$\text{Area}(T) = - \oint_{\Gamma} y \, dx$$

(segue da (2) con $F_1(x, y) = y$)

$$\text{Area}(T) = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} (x \, dy - y \, dx)$$