

Formule di Gauss-Green

Esercizio 2

Calcolare

$$\oint_{\Gamma} (x^3 - xy^3) dx + (y^2 - 2xy) dy$$

dove Γ è il perimetro del quadrato $D = [0, 2] \times [0, 2]$ percorso in senso antiorario.

Uso la formula di G.G. "al contrario"

$$\begin{aligned} I &= \oint_{\Gamma} \left[(x^3 - xy^3) \vec{i}_1 + (y^2 - 2xy) \vec{i}_2 \right] \cdot d\Gamma \\ &= \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} (y^2 - 2xy) - \frac{\partial}{\partial y} (x^3 - xy^3) \right] dx dy \\ &= \iint_D (-2y + 3xy^2) dx dy \\ &= \int_0^2 \left[\int_0^2 (-2y + 3xy^2) dy \right] dx \\ &= \int_0^2 \left[-y^2 + xy^3 \right]_0^2 dx = \int_0^2 (-4 + 8x) dx = 8 \end{aligned}$$