Equazioni omogenee

♣ Sono equazioni del tipo

$$y'(t) = g\left(\frac{y(t)}{t}\right),$$

con $g : J \to \mathbb{R}$, $J \subset \mathbb{R}$ intervallo.

♣ Si pone

$$v(t) = \frac{y(t)}{t}$$

da cui

$$y(t) = tv(t) \;\Rightarrow\; y'(t) = v(t) + tv'(t)$$

riducendosi all'equaz. a variabili separabili in v

$$v'(t) = \frac{1}{t}\left(g(v(t)) - v(t)\right)$$

Si risolve in v e poi si trova y.

Esercizio 10

Risolvere

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{ty(t) - y^2(t)}{t^2} \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

Ponendo $v(t) = \frac{y(t)}{t}$ si ottiene

$$\begin{cases} tv'(t) + v(t) = v(t) - v^2(t) \\ v(1) = \frac{y(1)}{1} \end{cases}$$

da cui il problema di Cauchy in v

$$\begin{cases} v'(t) = -\frac{1}{t}v^2(t) \\ v(1) = 2. \end{cases}$$

$\diamondsuit$ L'equazione differenziale in v è in forma normale con $f(t,v) = -\frac{1}{t}v^2$, che è di classe C^1 su $\mathrm{dom}(f) = (0,+\infty) \times \mathbb{R}$. Sono quindi soddisfatte le ipotesi del teor. di $\exists!$ locale. Sia I l'intervallo massimale di esistenza di v.

$\diamondsuit$ Osservo che la funzione $\bar{v}(t) \equiv 0$ risolve la stessa equazione differenziale, con

$$\bar{v}(1) = 0 < v(1) = 2.$$

Allora per confronto

$$v(t) > 0 \quad \forall\, t \in I.$$

$\diamondsuit$ Separando le variabili si ha

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{v}\right]_{v(1)}^{v(t)} &= \int_{v(1)}^{v(t)} \left(-\frac{1}{v^2}\right) \mathrm{d}v \\ &= \int_1^t \frac{1}{s}\,\mathrm{d}s = \log(t) \end{aligned}$$

Quindi

$$\frac{1}{v(t)} = \log(t) + \frac{1}{2} \ \Rightarrow\ v(t) = \frac{2}{2\log(t)+1}.$$

Allora

$$y(t) = \frac{2t}{2\log(t)+1}$$

con intervallo massimale di esistenza $I = (e^{-\frac{1}{2}}, +\infty)$.

Esercizio 11

Risolvere

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{y(t)}{t} + \tan\left(\frac{y(t)}{t}\right) \\ y(1) = y_1 \end{cases}$$

con le scelte $y_1 = 0$ e $y_1 = \frac{\pi}{4}$.

Ponendo $v(t) = \frac{y(t)}{t}$ si ottiene

$$\begin{cases} tv'(t) + v(t) = v(t) + \tan(v(t)) \\ v(1) = y_1 \end{cases}$$

da cui il problema di Cauchy in v

$$\begin{cases} v'(t) = \frac{1}{t}\tan(v(t)) \\ v(1) = y_1 \end{cases}$$

$\diamondsuit$ L'equazione differenziale in v è in forma normale con $f(t,v) = \frac{1}{t}\tan(v)$, che è di classe C^1 su $\mathrm{dom}(f) = (0,+\infty) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

$\diamondsuit$ Per il teor. di $\exists!$ locale, per ogni scelta di $y_1 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ esiste un'unica soluzione locale, con intervallo massimale di esistenza I.

$\diamondsuit$ Se $y_1 = 0$, l'unica soluzione (definita su $\mathbb{R}$!) è

$$v(t) \equiv 0 \ \forall\, t \in \mathbb{R} \ \Rightarrow y(t) \equiv 0 \ \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

$\diamondsuit$ Se $y_1 = \frac{\pi}{4}$, per confronto con la soluzione identicamente nulla si ha

$$v(t) > 0 \quad \forall\, t \in I.$$

Risolvo l'equazione in v separando le variabili

$$\int_{y_1}^{v(t)} \frac{1}{\tan(v)}\,\mathrm{d}v = \int_1^t \frac{1}{s}\,\mathrm{d}s$$

da cui, usando che $\frac{1}{\tan(v)} = \frac{\cos(v)}{\sin(v)}$,

$$[\log(|\sin(v)|)] = [\log(s)]_1^t\,.$$

Poiché $y_1 = \frac{\pi}{4}$, per t vicino a 1, $v(t)$ è "vicino" a $\frac{\pi}{4}$ e quindi $\sin(v(t))$ è strettamente positivo. Allora

$$\log(\sin(v(t))) = \log(t) + \log\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

da cui $\sin(v(t)) = \frac{\sqrt{2}}{2}t$ e quindi

$$v(t) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right).$$

$\diamondsuit$ Allora

$$y(t) = t\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right).$$

L'intervallo massimale di esistenza è $I = (0, \sqrt{2}]$: su tale intervallo si ha $v(t) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) > 0$, in accordo con la discussione precedente.