Esercizi svolti su serie di Fourier

Esercizio 1. Sviluppare in serie di Fourier

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{se } x \in [0, \pi] \\ 1 & \text{se } x \in (\pi, 2\pi), \end{cases}$$

estesa periodicamente a $\mathbb{R}$. Discutere inoltre convergenza puntuale e uniforme sugli intervalli $[0, 2\pi]$ e $[\pi/4, \pi/3]$. Scrivere la serie numerica associata alla convergenza puntuale in $x = \pi/2$.

Svolgimento. Notiamo che

$$f(x) = 2 + g(x)$$

dove g è un'onda quadra di coefficiente $A = 1$, cioè

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0, \pi] \\ -1 & \text{se } x \in (\pi, 2\pi). \end{cases}$$

Dunque la serie di Fourier associata è

$$f \sim 2 + \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}.$$

1. La serie converge puntualmente per ogni $x \in [0, 2\pi)$ a

   $$\begin{cases} 3 & \text{per } x \in (0, \pi) \\ 1 & \text{per } x \in (\pi, 2\pi) \\ 2 & \text{se } x = 0, \pi, 2\pi. \end{cases}$$

   in effetti

   $$2 = \frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} = \frac{3+1}{2}$$

   e idem in $x = \pi, 2\pi$.

   La convergenza non può essere uniforme perché il limite è discontinuo. Sull'intervallo $[\pi/4, \pi/3]$ la convergenza è uniforme essendo f di classe C^1 su tale intervallo.

2. Per $x = \frac{\pi}{2}$, la serie converge a $f(\pi/2) = 3$: dunque si ha

   $$\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin((2k+1)\frac{\pi}{2})}{2k+1} = 1.$$

   Ma

   $$\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right) = \begin{cases} 1 & \text{se } k \text{ èpari} \\ -1 & \text{se } k \text{ èdispari} \end{cases} = (-1)^k$$

   da cui si ha

   $$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$$

   cioè

   $$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}.$$

Esercizio 2. Sviluppare in serie di Fourier la funzione

$$f(x) = e^x, \qquad x \in [-\pi, \pi),$$

estesa con periodicità a tutto $\mathbb{R}$.

Svolgimento. Si ha

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x \, \mathrm{d}x = \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{\pi} = \frac{2}{\pi} \sinh \pi.$$

e per $n \geq 1$ si ha $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos(nx) \, \mathrm{d}x$. Abbiamo che

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos(nx) \, \mathrm{d}x &= [e^x \cos(nx)]_{-\pi}^{\pi} + n \int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin(nx) \, \mathrm{d}x \\ &= [e^x \cos(nx)]_{-\pi}^{\pi} + n \, [e^x \sin(nx)]_{-\pi}^{\pi} - n^2 \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos(nx) \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

da cui

$$(n^2+1) \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos(nx) \, \mathrm{d}x = [e^x \cos(nx)]_{-\pi}^{\pi} = e^\pi \cos(n\pi) - e^{-\pi} \cos(-n\pi) = 2(-1)^n \sinh \pi$$

e

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos(nx) \, \mathrm{d}x = \frac{2(-1)^n}{\pi(n^2+1)} \sinh \pi.$$

Similmente

$$b_n = \frac{-2(-1)^n n \sinh \pi}{\pi(n^2+1)}.$$

Esercizio 3. Data

$$f(x) = \begin{cases} -x\pi & -\pi \leq x \leq 0 \\ x^2 & 0 < x < \pi \end{cases}$$

si consideri la sua estensione 2π-periodica a $\mathbb{R}$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

1. *la sua serie di Fourier converge uniformemente a f su $\mathbb{R}$*
2. *la sua serie di Fourier converge a 0 per $x = 31\pi$*
3. *il coefficiente a_0 vale $\frac{5}{6}\pi^2$.*

---

1. Vero: f è continua su $\mathbb{R}$ ed è C^1 a tratti.
2. Falso: per periodicità si ha
$$f(31\pi) = f(\pi) = \pi^2.$$
3. Vero: si ha
$$\begin{aligned} a_0 =& \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, \mathrm{d}x \\ =& \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} (-x\pi) \, \mathrm{d}x + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} x^2 \, \mathrm{d}x \\ =& -\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{\pi} \\ =& \frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^2}{3} = \frac{5}{6}\pi^2. \end{aligned}$$