Integrali indefiniti (I)

... il problema inverso della derivazione....

Problema: data una funzione $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, trovare una funzione $F : (a, b) \to \mathbb{R}$, <u>derivabile</u>, tale che

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall\, x \in (a, b)\,.$$

Definizione: sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Chiamiamo *primitiva* di f su (a, b) ogni funzione

$$F : (a, b) \to \mathbb{R}, \quad \text{derivabile},$$

verificante

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall\, x \in (a, b)\,.$$

Esempi:

1. Sia

$$f(x) \equiv 1 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Allora la funzione

$$F_0(x) = x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

è una primitiva per f. Ma anche la funzione

$$F_1(x) = x + 1 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

è una primitiva per f (infatti $(F_1)' = (x+1)' = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$).

2. Sia

$$f(x) = x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Una primitiva di f è la funzione

$$F_0(x) = \frac{x^2}{2} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Lo è anche la funzione

$$F_{57}(x) = \frac{x^2}{2} + 57 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

(in quanto $(F_{57})' = (\frac{x^2}{2} + 57)' = (\frac{x^2}{2})' = x$).

3. Sia $f(x) = \cos(x)$, $x \in \mathbb{R}$: f ha infinite primitive, date dalle funzioni

$F_k(x) = \sin(x) + k \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$, al variare di $k \in \mathbb{R}$.

4. Sia $f(x) = \sin(x)$, $x \in \mathbb{R}$: f ha infinite primitive, date dalle funzioni

$F_k(x) = -\cos(x) + k \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$, al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Osservazioni: Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$.

- se f ammette una primitiva F su (a, b), allora f ammette di fatto infinite primitive su (a, b), in quanto

  per ogni costante reale c,
  la funzione $x \in (a, b) \mapsto F(x) + c$
  è anch'essa una primitiva di f.

  Infatti,

  $$(F + c)'\,(x) = F'(x) = f(x) \qquad \forall\, x \in (a, b)\,;$$

- se F e G sono due primitive di f su (a, b), allora

  $$\exists\, c \in :\ \ G(x) = F(x) + c \qquad \forall\, x \in (a, b)\,.$$

  Questo segue dal Teorema della derivata nulla: in effetti, la funzione $G - F$ ha derivata nulla, in quanto

  $$(G - F)'(x) = f(x) - f(x) \equiv 0 \quad \forall\, x \in (a, b),$$

  ed è definita su **un intervallo** (a, b).