Integrali indefiniti (II)

Definizione: data una funzione $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, chiamiamo *integrale indefinito* di f su (a, b) l'insieme di tutte le primitive di f su (a, b), ammesso che ne esistano.

Denotiamo l'integrale indefinito di f con il simbolo

$$\int f(x)\mathrm{d}x\,.$$

Osservazioni:

- l'integrale indefinito NON è un numero, ma un insieme di funzioni.

- abbiamo visto che

  – se una funzione $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ ammette una primitiva F su (a, b), allora di fatto ne ammette infinite, che differiscono per una costante reale.

  – in questo modo (sommando a una primitiva una generica costante) si ottengono tutte e sole le primitive di f.

Come conseguenza di queste osservazioni:

Teorema di struttura per gli integrali indefiniti: Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ e supponiamo che essa ammetta una primitiva F. Allora l'integrale indefinito di f è dato da

$$\int f(x)\, \mathrm{d}x = \{F + c : \ c \in \mathbb{R}\} \, .$$

- Sintetizzeremo questa formula scrivendo

$$\int f(x)\, \mathrm{d}x = F(x) + c \, ,$$

intendendo che la constante c varia arbitrariamente in $\mathbb{R}$.

Esempi:

1. Tenendo conto che una primitiva della funzione $f(x) = x^2$ è la funzione $F(x) = \frac{x^3}{3}$, scriveremo

$$\int x^2\, \mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + c \, .$$

2. Osservando che una primitiva di $f(x) = 6x^5$ è $F(x) = x^6$, abbiamo

$$\int 6x^5\, \mathrm{d}x = x^6 + c \, .$$