Integrali definiti

Definizione: Siano
♣ $[a, b]$ un intervallo chiuso e limitato
♣ $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua ($\Rightarrow$ quindi f ammette infinite primitive su $[a, b]$).

Chiamiamo *integrale definito* di f su $[a, b]$ (e lo denotiamo con il simbolo $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$) il numero

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a),$$

dove F è una qualsiasi primitiva di f.

Osservazioni:

1. l'integrale DEFINITO è un numero!

2. Questa definizione è ben posta, cioè NON dipende dalla scelta della primitiva di f. Cioè, cambiando la primitiva di f, si ottiene sempre lo stesso numero! Infatti,

◇ sia $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ una qualsiasi altra primitiva di f;

$\diamondsuit$ per il teorema di struttura, F e G differiscono per una costante, cioè

$$\exists\, k \in \mathbb{R} \,:\; G(x) = F(x) + k \quad \forall\, x \in [a,b].$$

$\diamondsuit$ Allora

$$\begin{aligned} G(b) - G(a) &= F(b) + k - (F(a) + k) \\ &= F(b) - F(a) \\ &= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

$\diamondsuit$ si usa la scrittura più sintetica

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b$$

Significato geometrico dell'integrale definito:
Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è una funzione continua e <u>positiva</u>, cioè

$$f(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in [a,b],$$

allora

$\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ è l'area della regione piana compresa fra graf(f) e l'asse x

Integrali definiti e parità/disparità. Sia

♣ $[-M, M]$ un intervallo
simmetrico rispetto all'origine

e $f : [-M, M] \to R$ una funzione continua (quindi possiamo considerarne l'integrale definito). Allora

$$f \text{ dispari su } [-M, M] \;\Rightarrow\; \int_{-M}^{M} f(x)\, \mathrm{d}x = 0.$$

$$f \text{ pari su } [-M, M] \;\Rightarrow\; \int_{-M}^{M} f(x)\, \mathrm{d}x = 2\int_{0}^{M} f(x)\, \mathrm{d}x.$$

Osservazione: la seconda formula è chiara nel caso in cui $f : [-M, M] \to \mathbb{R}$ è continua, pari, e positiva, quindi $\int_{-M}^{M} f(x)\, \mathrm{d}x$ è un'area..