Integrali indefiniti e definiti

Esempi di calcolo di integrali indefiniti e definiti

1. Si ha che

$$\int \left(2x^{4/3} + \frac{4}{1+3x^2} + 5\sin(\pi x)\right) \, \mathrm{d}x$$

$$= 2\int x^{4/3}\,\mathrm{d}x + 4\int \frac{1}{1+(\sqrt{3}x)^2}\,\mathrm{d}x + 5\int \sin(\pi x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{6}{7}x^{7/3} + \frac{4}{\sqrt{3}}\arctan(\sqrt{3}x) - \frac{5}{\pi}\cos(\pi x) + c\,.$$

Osservazione generale importante: per verificare il risultato del calcolo di un integrale indefinito, è sufficiente

derivare la primitiva ottenuta e verificare
che in qs. modo si ritrova la funzione di partenza

Per esempio,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{6}{7}x^{7/3} + \frac{4}{\sqrt{3}}\arctan(\sqrt{3}x) - \frac{5}{\pi}\cos(\pi x)\right)$$

$$= 2x^{4/3} + \frac{4}{1+3x^2} + 5\sin(\pi x)$$

Quindi, l'area $\mathcal{A}$ della regione piana compresa fra il grafico della funzione

$$f:[0,1]\to\mathbb{R}, \qquad f(x)=2x^{4/3}+\frac{4}{1+3x^2}+5\sin(\pi x)$$

(si noti che f è continua e positiva su $[0,1]$) e l'asse delle x è (prendo la primitiva con $c=0$)

$$\mathcal{A}=\int_0^1\left(2x^{4/3}+\frac{4}{1+3x^2}+5\sin(\pi x)\right)\mathrm{d}x$$

$$=\left[\frac{6}{7}x^{7/3}+\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan(\sqrt{3}x)-\frac{5}{\pi}\cos(\pi x)\right]_0^1$$

$$=\frac{6}{7}+\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan(\sqrt{3})-\frac{5}{\pi}\cos(\pi)-\left(-\frac{5}{\pi}\cos(0)\right).$$

---

2. Si ha che

$$\int\left(\frac{3}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}+\frac{1}{3x}+4e^{-x}\right)\mathrm{d}x$$

$$=3\int\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\mathrm{d}x+\frac{1}{3}\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x+4\int e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

$$=6\tan\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{3}\ln(|x|)-4e^{-x}+c\,.$$

Quindi, l'area $\mathcal{A}$ della regione piana compresa fra il grafico della funzione

$$f:\left[\frac{1}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}\qquad f(x)=\frac{3}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}+\frac{1}{3x}+4e^{-x}$$

(si noti che f è continua e positiva su $\left[\frac{1}{2},\frac{\pi}{2}\right]$) e l'asse delle x è (prendo la primitiva con $c=0$)

$$\mathcal{A}=\int_{1/2}^{\pi/2}\left(\frac{3}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}+\frac{1}{3x}+4e^{-x}\right)\,\mathrm{d}x$$

$$=\left[6\tan\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{3}\ln(x)-4e^{-x}\right]_{1/2}^{\pi/2}$$

$$=\ldots$$