Integrali indefiniti (V)

Integrale indefinito = insieme di (infinite) funzioni.

Per selezionare una sola fra tutte le primitive di una assegnata funzione f, è sufficiente imporre che,

in un dato punto x_0,

la primitiva assuma un assegnato valore y_0.

Esempi.

1. Calcolare la primitiva (**l'unica!**) $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ della funzione

$$f(x) = x^5 + \frac{1}{x^2+4}, \quad x \in \mathbb{R},$$

verificante

$$F(0) = 3.$$

Calcoliamo l'integrale indefinito di f, osservando che

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+4}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+\frac{x^2}{4}}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + c\end{aligned}$$

(si noti che abbiamo raccolto un 4 al denominatore per riscrivere la funzione $\frac{1}{x^2+4}$ in una formula più simile a $\frac{1}{1+x^2}$).
Allora

$$\int \left(x^5 + \frac{1}{x^2+4} \right) \mathrm{d}x = \frac{x^6}{6} + \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{x}{2} \right) + c\,.$$

Ora ricerchiamo fra tutte le primitive di f l'unica verificante $F(0) = 3$: dobbiamo determinare la costante c imponendo

$$3 = F(0) = 0 + \frac{1}{2} \arctan(0) + c,$$

da cui $c = 3$.

Quindi

$$F(x) = \frac{x^6}{6} + \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{x}{2} \right) + 3 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

---

2. Calcolare la primitiva (**l'unica!**) $G : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ della funzione

$$f(x) = \frac{x+2}{x^{5/2}}, \qquad x \in (0, +\infty),$$

tale che il grafico graf(G) passi per $(4, 2)$.

Calcoliamo l'integrale indefinito di f:

$$\begin{aligned}
\int \left(\frac{x+2}{x^{5/2}}\right) \mathrm{d}x &= \int \left(\frac{x}{x^{5/2}} + \frac{2}{x^{5/2}}\right) \mathrm{d}x \\
&= \int x^{-3/2}\, \mathrm{d}x + 2\int x^{-5/2}\, \mathrm{d}x \\
&= -2x^{-1/2} - \frac{4}{3}x^{-3/2} + c\,.
\end{aligned}$$

La condizione che

$$\text{graf}(G) \text{ passi per il punto } (4,2)$$

ovviamente <u>equivale</u> a imporre che

$$G(4) = 2,$$

quindi determiniamo c:

$$2 = G(4) = -2 4^{-1/2} - \frac{4}{3} 4^{-3/2} + c = -1 - \frac{4}{3}\frac{1}{8} = -\frac{7}{6}\,.$$

Quindi

$$G(x) = -2x^{-1/2} - \frac{4}{3}x^{-3/2} + \frac{19}{6} \qquad \forall\, x \in (0,+\infty)\,.$$

---

3. Si consideri funzione

$$f(x) = \sin\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{1}{4}e^{2x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

• Determinare la funzione $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la cui derivata è f, il cui grafico passa per $(0,0)$;
• scrivere l'equazione della retta tangente a graf(F) in $(0,0)$;
• calcolare la derivata seconda di F.

♢ Calcoliamo l'integrale indefinito di f:

$$\int \left(\sin\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{1}{4}e^{2x}\right) \mathrm{d}x = \int \sin\left(\frac{x}{3}\right) \mathrm{d}x + \frac{1}{4}\int e^{2x}\,\mathrm{d}x$$
$$= -3\cos\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{1}{8}e^{2x} + c\,.$$

La condizione che

graf(F) passi per il punto $(0,0)$ equivale a $F(0) = 0$

quindi

$$0 = F(0) = -3\cos(0) + \frac{1}{8}e^{0} + c \;\Rightarrow\; c = 3 - \frac{1}{8} = \frac{23}{8}$$

da cui

$$F(x) = -3\cos\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{1}{8}e^{2x} + \frac{23}{8}.$$

♢ Chiaramente la derivata di F è f (**verificarlo!**), quindi per la retta tangente in $(0,0)$ serve

$$F'(0) = f(0) = \sin(0) + \frac{1}{4}e^{0} = \frac{1}{4}$$

quindi la retta tangente è

$$y = \frac{1}{4}x$$

$\diamondsuit$ La derivata seconda di F è la derivata di f', cioè

$$F''(x) = f'(x) = \frac{1}{3}\cos\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{1}{2}e^{2x} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$