Integrali impropri

Riccarda Rossi

Università di Brescia

Analisi I

Motivazione: “estendere” l’integrale di Riemann

$\int_a^b f(x)dx$ è definito per funzioni f

- definite su $[a, b]$ **LIMITATO**
- **LIMITATE** su $[a, b]$

ipotesi di base per l'integrale di Riemann

Vogliamo generalizzare la definizione di integrale (e il calcolo di integrali) al caso di

- intervallo di integrazione **ILLIMITATO** (a, b),
- funzione f **ILLIMITATA** su (a, b)
- funzione **illimitata** su intervallo **illimitato**

$\Rightarrow$ Otterremo la nozione di integrale improprio (o generalizzato).

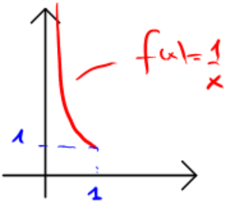
↳ non è più l'integrale di Riemann

CASO (I): integrali impropri su intervalli limitati

Estendere la nozione di integrale a funzioni **illimitate** definite su **intervalli limitati**.

Esempio: $f : (0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$:

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\, dx????$$



Tipicamente: funzioni $f : (a,b] \to \mathbb{R}$, illimitate in un intorno destro di a: si dice anche che f ha una *singolarità* in a.

Per es: $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0,1]$, ha una singolarità in 0. Altri

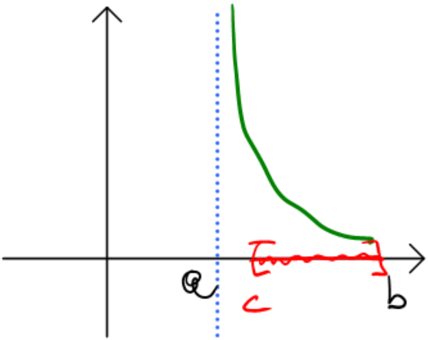
esempi: $f_1(x) = \log(x)$, $x \in (0,1]$; $f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$, $(1,2]$

Sia $\boxed{f:(a,b]\to\mathbb{R}}$.

Definizione

su $(a,b]$

Diciamo che f è *localmente integrabile* se è integrabile secondo Riemann su $[c,b]$ $\forall c \in (a,b]$.



$f:(a,b]\to\mathbb{R}$

f ha singolarità in a.

Richiedo che f sia integrab 2° Riemann su ogni $[c,b]$

Definizione: integrale improprio su intervalli $(a, b]$ semiaperti a sinistra

Sia $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ localmente integrabile. su $(a, b] \Rightarrow \forall c > a$ $\int_c^b f(x)dx$ è ben def. nel senso di Riemann

- Se $\exists \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\,dx \in \mathbb{R}$ si dice che f è integrabile in senso improprio su $(a, b]$ e si pone

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\,dx.$$

$\int_a^b f(x)\,dx$ viene detto *integrale improprio di f su* $[a, b]$. (*integrale improprio convergente*).

- Se $\exists \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\,dx \in \{-\infty, +\infty\}$, si dice che l'integrale improprio di f su $(a, b]$ è divergente, o che f non è integrabile in senso improprio.

- Se $\nexists \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\,dx$, si dice che l'integrale improprio di f su $(a, b]$ è oscillante.

Integrale impropri su intervalli $[a, b)$ semiaperti a destra

Esempio

Considero ln su $[\frac{1}{2}, 1)$

$$\int_{1/2}^{1} \frac{1}{\ln(x)}\, dx????$$

La funzione $\frac{1}{\log(x)}$ non è limitata su $[1/2, 1)$, ha una singolarità in 1: $\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{\log(x)} = -\infty$

Tipicamente: funzioni $f : [a, b) \to \mathbb{R}$, illimitate in un intorno sinistro di b (f ha una *singolarità* in b).

Definizione

IPOTESI

Sia $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ localmente integrabile su $[a, b)$ (cioè integrabile secondo Riemann su $[a, c]$ per ogni $c \in [a, b)$).

- Se
$$\exists \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\,dx \in \mathbb{R}$$
si dice che f è integrabile in senso improprio su $[a, b)$ e si pone
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\,dx.$$

- Se $\exists \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\,dx \in \{-\infty, +\infty\}$, si dice che l'integrale improprio di f su $[a, b)$ è divergente, oppure che f non è integrabile in senso improprio.

- Se $\nexists \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\,dx$, si dice che l'integrale improprio di f su $[a, b)$ è oscillante.

- **Osservazioni:** l'ipotesi di base è che f sia LOCALM. INTEGR.
  - le definizioni sono costruite a partire dagli integrali $\int_c^b f(x)\,dx$ o $\int_a^c f(x)\,dx$, che sono ben definiti come integrali di Riemann (f è localmente integrabile).

    $\Downarrow$

    ha senso calcolare

    $$\lim_{c\to a^+} \int_c^b f(x)\,dx \quad \text{o} \quad \lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)\,dx$$

  - se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è integrabile secondo Riemann, f è anche integrabile in senso improprio e i due integrali coincidono. Quindi **l'integrale improprio è un'estensione dell'integrale di Riemann**.

Consideriamo funzioni con
una singolarità all'interno dell'intervallo di integrazione.

Definizione

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$ punto interno, f non limitata nell'intorno di x_0. Si dice che f è integrabile in senso improprio in $[a, b]$ se

- f è integrabile in $[a, x_0)$ **E**
- f è integrabile in $(x_0, b]$

in senso improprio

e si pone

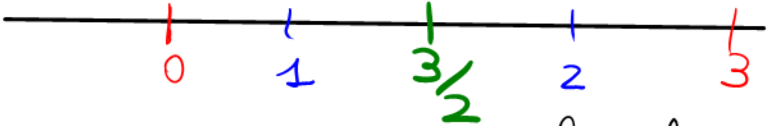
$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^{x_0} f(x)\,dx + \int_{x_0}^b f(x)\,dx.$$

Si estende questa definizione al caso di funzione illimitata nell'intorno di più punti $x_1, x_2, \cdots, x_n$ in $[a, b]$.

Esempio

$f : [0,3] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-1)(x-2)} & \text{se } x \in [0,3] \setminus \{1,2\}, \\ -1 & \text{se } x = 1, \\ 2 & \text{se } x = 2. \end{cases}$$



1 e 2 sono punti di singolarità interni a $[0,3]$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

Secondo la definizione data, f è integrabile in senso improprio su $[0,3]$ se e solo se:

- f è integrabile in senso improprio su $[0,1)$

e

- f è " " su $(1, 3/2]$

e

- f è " " su $[3/2, 2)$

e

- f è " " su $(2, 3]$

Esempio

$$\boxed{f:(0,1]\to\mathbb{R}\quad f(x)=\frac{1}{x^\alpha}}, \text{ con } \alpha>0.$$

(1) $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^\alpha}=+\infty$, quindi non è definito l'integrale di Riemann di f.

(2) f è localmente integrabile su $(0,1]$, infatti $\forall\, c\in(0,1]$

f è continua su $[c,1]$ $\Rightarrow$ Riemann-integrabile su $[c,1]$

Studio

$$\int_c^1 \underbrace{\frac{1}{x^\alpha}}_{x^{-\alpha}}\,dx = \begin{cases} \left[\log(x)\right]_c^1 = -\log(c) & \alpha=1 \\ \left[\dfrac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_c^1 = \dfrac{1}{1-\alpha}-\dfrac{c^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \alpha\neq 1 \end{cases}$$

• Per $\alpha = 1$ $\quad \displaystyle\lim_{c \to 0^+} \int_c^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$

$$= \lim_{c \to 0^+} \left(-\log(c)\right) = +\infty$$

• Per $\alpha \neq 1$ $\quad \displaystyle\lim_{c \to 0^+} \int_c^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$

$$= \lim_{c \to 0^+} \left(\frac{1}{1-\alpha} - \frac{c^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right)$$

$\alpha \le 0$

$\frac{1}{x^\alpha} = x^{-\alpha}$ è integrab 2° R.

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha} & \text{se } \alpha < 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

(ES: verificarlo!)

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx \quad \begin{cases} \text{converge se } 0 < \alpha < 1 \\ \text{diverge se } \alpha \ge 1 \end{cases}$$

Per esempio

- $f(x) = \frac{1}{x^2}$ **NON È** integrabile in senso improprio su $(0, 1]$

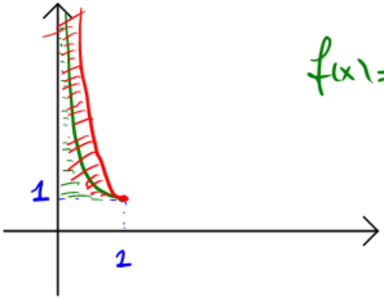
$\alpha = 2$

- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ **È** integrabile in senso improprio su $(0, 1]$

$\alpha = 1/2$

$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \text{area}(\dots)$

$\int_0^1 \frac{1}{x^2} = \text{area}(\dots)$



$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$f(x) = \frac{1}{x^2}$

$\frac{1}{\sqrt{x}} \le \frac{1}{x^2}$

$(\Leftrightarrow x^2 \le \sqrt{x}$ per $x \in [0,1])$

CASO (2): integrali impropri su intervalli illimitati

Definizione: semirette inferiormente limitate

Sia $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$. Supponiamo f sia localmente integrabile su $[a, +\infty)$, cioè per ogni $c > a$ f è Riemann-integrabile su $[a, c]$.

- Se
$$\exists \lim_{c \to +\infty} \int_a^c f(x)\,dx \in \mathbb{R}$$
allora si dice che f è integrabile in senso improprio su $[a, +\infty)$ e si pone
$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{c \to +\infty} \int_a^c f(x)\,dx.$$
- Se il limite esiste, ma non è finito, allora f ha integrale improprio divergente su $[a, +\infty)$.
- Se il $\nexists \lim_{c \to +\infty} \int_a^c f(x)\,dx$, si dice che l'integrale improprio di f su $[a, +\infty)$ è <u>oscillante</u>.

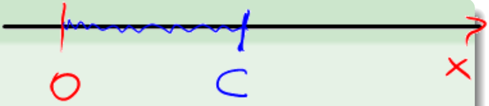
Analoga definizione per $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ (semirette superiormente limitate).

Per esercizio, dare:

1) definizione di funzione localm. integrabile su $(-\infty, b]$

2) definiz. di integrale improprio su $(-\infty, b]$

Esempio (1)



Sia $\boxed{f(x) = e^{-x}}$ su $\boxed{[0, +\infty)}$.

. $f \in C^0(\mathbb{R}) \Rightarrow \forall c > 0$ f è cont. su $[0, c] \Rightarrow f$ è integrab. 2° Riemann su $[0, c]$

$\Rightarrow f$ è localm. integrab. su $[0, +\infty)$

$$\lim_{c \to +\infty} \int_0^c e^{-x}\,dx = \lim_{c \to +\infty} \left[-e^{-x}\right]_0^c = \lim_{c \to +\infty} \left(1 - \underbrace{e^{-c}}_{=0}\right) = 1 \in \mathbb{R}$$

Dunque f è integrabile in senso improprio su $[0, +\infty)$.

Esempio (2)

Sia $\boxed{f(x) = \cos(x)}$ su $\boxed{(-\infty, 0]}$.

- f è localm. integrab. su $(-\infty, 0]$ (ES.)

- $\lim_{c \to -\infty} \int_c^0 \cos(x)\,dx = \lim_{c \to -\infty} \left[\sin(x)\right]_c^0 = \lim_{c \to -\infty} (-\sin(c))$

NON ESISTE

$\Rightarrow$ cos(x) ha integrale improprio <u>oscillante</u> su $(-\infty, 0]$

Esempio (3)

Sia $\boxed{f(x) = \frac{1}{x^\alpha}, \alpha > 0}$ su $\boxed{[1, +\infty)}$.

ES: f è localm. integrab. su $[1,+\infty)$

- $$\int_1^c \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \log(c) & \text{se } \alpha = 1 \\ \frac{c^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} & \text{se } \alpha \neq 1 \end{cases}$$

- per $\alpha = 1$ $\quad \lim_{c \to +\infty} \int_1^c \frac{1}{x^\alpha}\,dx = +\infty$

$\Rightarrow \frac{1}{x^\alpha}$ ha integ. improprio DIVERG. su $[1,+\infty)$

· per $\alpha < 1$ $\lim_{c\to+\infty} \left(\frac{c^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \right) = +\infty$

$\Rightarrow \frac{1}{x^\alpha}$ ha integr. improprio DIVERG. su $[1,+\infty)$

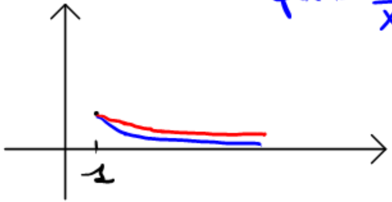
· per $\alpha > 1$ $\lim_{c\to+\infty} \left(\frac{c^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \right) =$

CONVERGE su $[1,+\infty)$ $= -\frac{1}{1-\alpha} = \frac{1}{\alpha-1} \in \mathbb{R}$

- $\frac{1}{x^\alpha}$ **È** integrabile in senso improprio su $[1, +\infty)$ se $\boxed{\alpha > 1}$
- $\frac{1}{x^\alpha}$ ha integrale improprio su $[1, +\infty)$ divergente per $\alpha \leq 1$.

Esempio

$f(x) = \frac{1}{x^2}$ $\quad$ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$



per $x \geq 1$

$$\frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$$

converge, mentre

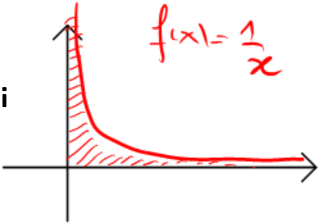
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

diverge a $+\infty$

CASO (3): integrali impropri su intervalli aperti

È il caso più generale: funzioni

- possibilmente **illimitate**
- definite su intervalli possibilmente **illimitati**



Esempio:

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx} \quad \text{con} \quad \boxed{I = (0, +\infty)}$$

si ha

- $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ $\longrightarrow$ $\frac{1}{x}$ ha singolarità in 0
- integriamo su una semiretta illimitata superiormente

♣ La definizione di integrale improprio in questo caso si ispira alla proprietà di additività dell'integrale di Riemann: "spezziamo" $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx}$ in

- $\int_0^1 \frac{1}{x}\, dx \rightsquigarrow$ integrale improprio *di prima specie* su $(0, 1]$
- $\int_1^\infty \frac{1}{x}\, dx \rightsquigarrow$ integrale improprio *di seconda specie* su $[1, +\infty)$

e studiamo la convergenza dei due separatamente

Definizione

Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ con $a,b\in\overline{\mathbb{R}}$. Diciamo che f è

1. *localmente integrabile* su (a,b)

   se f è Riemann-integrabile su ogni sottointervallo $[\alpha,\beta]$ di (a,b),con $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$);

   chiuso e limitato

2. f è integrabile in senso improprio su (a,b) se f è localmente integrabile e per ogni $c\in(a,b)$ si ha che f è integrabile (in senso improprio) su $(a,c]$ e su $[c,b)$:

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

per es

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$$

Osservazione: L'integrabilità di f non dipende dalla scelta di c.

Esempi:

(1) $\boxed{f(x) = \frac{1}{x}}$ **NON È** integrabile in senso improprio su $(0, +\infty)$.

infatti!

Scelgo $c = 1$ e vedo che

- $\frac{1}{x}$ non è integrab. impropriam. su $(0, 1]$
- $\frac{1}{x}$ non è integr. impropr. su $[1, +\infty)$

ES: provare a vedere cosa sarebbe successo se avessi scelto $c = 3$.