Integrali impropri

Riccarda Rossi

Università di Brescia

Analisi I

(2) $\boxed{\forall\, \alpha > 0 \quad f(x) = \dfrac{1}{x^{\alpha}}}$ **NON È** integrabile in senso improprio su $(0, +\infty)$. Infatti,

intervallo aperto: per def, $\frac{1}{x^\alpha}$ è integrab su $(0,+\infty)$ se e solo se

$\int_0^c \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ converge e $\int_c^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ converge

integrale improprio su semiretta

qui isoliamo la singolarità in 0

con $c \in (0,+\infty)$, qualsiasi.

N.B. La proprietà di integrabilità su $(0,+\infty)$ non dipende dalla scelta del punto c,

possiamo scegliere $c=1$

$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ converge $\Leftrightarrow$ $\alpha < 1$; $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$

(3) la funzione $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ PER NESSUN VALORE di $\alpha > 0$ si ha la convergenza di $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^{1/3}} & \text{se } x \in (0,1], \\ \frac{1}{x^4} & \text{se } x \in [1,+\infty), \end{cases}$$

è integrabile in senso improprio su $(0, +\infty)$, infatti

$\int_0^1 f(x)\,dx$ converge e $\int_1^\infty f(x)\,dx$ converge

$\int_0^1 \frac{1}{x^{1/3}}\,dx$, e $\alpha = \frac{1}{3} < 1$

$\int_1^\infty \frac{1}{x^4}\,dx$, $\alpha = 4 > 1$

Criteri di convergenza

Problema: stabilire se una funzione f definita su I è integrabile in senso improprio su I, senza calcolare il valore numerico dell'integrale.

Osservazioni:

- È un problema affine allo studio del carattere di una serie numerica: avremo criteri dello stesso tipo.
- Enunciamo i criteri per integrali impropri su semirette (per es., su $[a, +\infty)$).
- Gli enunciati si adattano anche a integrali impropri su intervalli semiaperti (per es., su $(a, b]$ per f illimitata nell'intorno di a)
- Quindi è OK anche caso generale di integrali impropri su intervalli aperti (a, b), con a, $b \in \overline{\mathbb{R}}$.

♣ D'ora in poi: $\boxed{f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}}$, $\boxed{\text{localmente integrabile}}$ su $[a, +\infty)$.

$$\text{¿ condizioni sufficienti affinché } \exists \lim_{c \to +\infty} \int_a^c f(x)\,dx \boxed{\in \mathbb{R}} ?$$

Proposizione: 1. Esistenza del limite.

Supponiamo che $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ sia $\boxed{\text{positiva}}$ e f sia localmente integrab. su $[a, +\infty)$. Allora

$$\exists \lim_{c \to +\infty} \int_a^c f(x)\,dx = \sup_{c > a} \int_a^c f(x)\,dx \in [0, +\infty].$$

Quindi $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge se e solo se $\sup_{c>a} \int_a^c f(x)\,dx \boxed{< +\infty}$.

Siccome $\exists \lim_{c \to +\infty} \int_a^c f(x)dx$, l'integrale improprio di f su $[a, +\infty)$ NON è oscillante, converge (se $\sup_{c>a} \int_a^c f(x)dx < +\infty$), o diverge.

Dimostrazione

Introduciamo la funzione integrale $F : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da

$$F(c) := \int_a^c f(x)\,dx$$

(F è ben definita $\forall c \geq a$ perché f è localm. integrabile su $[a, +\infty)$, per ipotesi)

- F è crescente su $[a, +\infty)$, cioè $\forall c_1, c_2 \in [a, +\infty)$, $c_1 \leq c_2 \Rightarrow F(c_1) \leq F(c_2)$

infatti

$$F(c_2) - F(c_1) = \int_a^{c_2} f(x)\,dx - \int_a^{c_1} f(x)\,dx$$

proprietà additiva

$$= \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx$$

perché $f \geq 0$ e uso la proprietà del confronto dell'integrale

$$\geq \int_{c_1}^{c_2} 0\,dx = 0$$

Poiché F è crescente,

$\exists \lim_{c\to+\infty} F(c) = \sup_{c\in[a,+\infty)} F(c) \in [0,+\infty]$

Siccome $F(c) = \int_a^c f(x)\,dx$,

segue la TESI. $\boxtimes$

♣ **Osservazione:** fare il confronto con la teoria delle serie: data $(a_n)_n \subset [0, +\infty)$, la serie

$$\sum_n a_n \text{ è convergente oppure divergente.}$$

$\Rightarrow$ studiamo integrali impropri di funzioni positive tramite criteri.

Teoria integrali impropri $\sim$ teoria delle serie numeriche:

$$\text{criteri per integrale improprio di funz. positive}$$
$$\sim \text{criteri per carattere serie positive}$$

Criterio del confronto

Siano f, $g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, localmente integrabili con

$$\underline{0 \leq} f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, +\infty). \qquad (*)$$

Se g è integrabile in senso improprio sull'intervallo $[a, +\infty)$, allora lo è anche f.

Equivalentemente: se vale $(*)$ e f ha integrale improprio divergente su $[a, +\infty)$, anche g ha integrale improprio divergente su $[a, +\infty)$.

Dimostrazione:

idea: introduco le funzioni integrali

$F : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, $F(c) := \int_a^c f(x)\,dx$

$G : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, $G(c) = \int_a^c g(x)\,dx$

e osservare (da giustificare!) che

$$F(c) \leq G(c) \quad \forall c \in [a, +\infty)$$

... concludere ... $\boxtimes$

Criterio del confronto asintotico

Siano $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, localmente integrabili con $f, g > 0$.
Supponiamo che esista

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L. \in [0, +\infty]$$

Allora,

scriveremo $f(x) \sim g(x)$ per $x \to +\infty$

1. se $\boxed{L \in (0, +\infty)}$, f è integrabile in senso improprio su $[a, +\infty)$ se e solo se g è $\boxed{\text{integrabile in senso improprio}}$ su $[a, +\infty)$;
2. se $\boxed{L = 0}$ e g è integrabile in senso improprio su $[a, +\infty)$, allora lo è anche f;
3. se $\boxed{L = +\infty}$ e g non è integrabile in senso improprio su $[a, +\infty)$, allora anche f non lo è.

Il teorema di Mac Laurin mette in luce il fatto che la teoria degli integrali impropri e la teoria delle serie sono *due facce della stessa medaglia*.

Teorema di McLaurin

Sia
$$f : [1,+\infty) \to \mathbb{R} \quad \underline{\text{positiva}} \text{ e } \underline{\text{decrescente}} \text{ in } [1,+\infty).$$

Allora
$$\text{l'integrale improprio } \int_1^{+\infty} f(x)dx \text{ e}$$
$$\text{la serie } \sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$$

sono entrambi convergenti o entrambi divergenti.

Dimostrazione

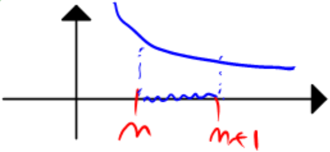
Fisso $n \geq 1$ e considero

$$\int_n^{n+1} f(x)\,dx$$

Per la proprietà del confronto dell'integrale di Riemann,

$$\int_n^{n+1} \underbrace{\inf_{x\in[n,n+1]} f(x)}_{= f(n+1)} \leq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq \int_n^{n+1} \underbrace{\sup_{x\in[n,n+1]} f(x)}_{= f(n)}\,dx$$

$$= f(n+1)$$



$$= f(n)\int_n^{n+1} 1\,dx = f(n)(\cancel{n}+1-\cancel{n}) = f(n)$$

Allora, $\forall k \in \mathbb{N}$, $k>1$ si ha

$$\int_1^k f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{k-1} \int_n^{n+1} f(x)\,dx$$

$\downarrow$ additività

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{k-1} f(n+1) \le \int_1^k f(x)\,dx \le \sum_{n=1}^{k-1} f(n)$$

<u>ora</u> supponiamo che $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ converga e dimostro che f è integrabile in senso improprio su $[1,+\infty)$.

<u>Infatti</u>: $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ converge, allora

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k-1} f(n) \in [0,+\infty)$$

poiché

$$0 \leq \int_1^k f(x)\,dx \leq \sum_{n=1}^{k-1} f(n),$$

$f \geq 0$ concludo che

$$\lim_{k\to+\infty} \int_1^k f(x)\,dx \in [0,+\infty)$$

$\Rightarrow$ f è integrab. impropriam. su $[1,+\infty)$.

Viceversa, supp. che f sia integrab. su $[1,+\infty)$

$\Rightarrow \exists \lim_{k\to+\infty} \int_1^k f(x)\,dx \in [0,+\infty)$ - Siccome

$$\int_1^k f(x)\,dx \geq \sum_{n=1}^{k-1} f(n+1) = \sum_{m=2}^{k} f(m)$$

$m = n+1$

$$\Rightarrow \exists \lim_{k\to\infty} \sum_{m=2}^{k} f(m) \in [0,+\infty)$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ converge $\boxtimes$

Esempi fondamentali

Ecco una famiglia di integrali impropri noti, con i quali fare il confronto.

$$\int_0^1 x^{-\alpha} dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{se } \alpha < 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

$\frac{1}{x^\alpha}$

$$\int_1^{+\infty} x^{-\alpha} dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{se } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

(per $\beta=0$, ritrovo $\int \frac{1}{x^\alpha}\,dx$

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{x^\alpha |\log x|^\beta}\,dx = \begin{cases} \text{converge se } \alpha<1,\ \forall\beta, \text{ oppure se } \alpha=1 \text{ e } \beta>1 \\ \text{diverge in tutti gli altri casi} \end{cases}.$$

$$\forall a>1, \quad \int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha |\log x|^\beta}\,dx = \begin{cases} \text{converge se } \alpha>1,\ \forall\beta, \text{ oppure se } \alpha=1 \text{ e } \beta>1 \\ \text{diverge in tutti gli altri casi} \end{cases}.$$

Osservazione: per il teorema di Mac-Laurin, la serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}|\log n|^{\beta}} \text{ ha lo stesso carattere di}$$

$$\int_{a}^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}|\log x|^{\beta}}\, dx$$

Convergenza assoluta

Diamo la definizione e i risultati per integrali impropri su semirette.
Risultati e definizioni analoghe per integrali impropri su intervalli semiaperti/intervalli aperti.

Definizione

Sia $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ localmente integrabile. Diciamo che f è *integrabile assolutamente in senso improprio* se

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx \quad \text{converge.}$$

(questa definizione è da confrontare con la definizione di serie assolutam. convergente)

Teorema

Sia $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ localmente integrabile. Allora:

$$\text{se } |f| \text{ è integrabile in senso improprio su } [a, +\infty),$$
$$\text{anche } f \text{ è integrabile in senso improprio su } [a, +\infty)$$

e si ha

$$\left| \int_a^{+\infty} f(x)\, dx \right| \leq \int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx.$$

Osservazione: Non vale il viceversa: per esempio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx \qquad \text{è integrabile in senso improprio su } (0, +\infty),$$

mentre

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\, dx = +\infty.$$

Strategia: come per le serie numeriche, per studiare l'integrabilità (in senso improprio) di f conviene

- studiare **innanzitutto** l'integrabilità assoluta, cioè l'integrabilità (in senso improprio) di $|f|$. Infatti, per lo studio di $\int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx$ è possibile **applicare i criteri per gli integrali impropri di funz. positive**.
- Se si dimostra che $\int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx < +\infty$, allora si ha che $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ converge.
- **MA**, se $\int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx = +\infty$, allora non si conclude nulla su $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$!!!