L'integrale di Riemann

Riccarda Rossi

Università di Brescia

Analisi I

Formule di integrazione

Integrazione per parti

Si applica all'integrazione di <u>prodotti di funzioni</u>

Proposizione: formula di integrazione per parti

Sia $I \subset \mathbb{R}$ intervallo in $\mathbb{R}$ e siano $f, g : I \to \mathbb{R}$ due funzioni <u>derivabili con derivata continua</u> (cioè f, $g \in \mathrm{C}^1(I)$).
Allora per ogni $a, b \in I$ abbiamo che

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = \underbrace{[f(x)g(x)]_a^b}_{\substack{\| \\ f(b)g(b) - f(a)g(a)}} - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$

Questa formula deriva dalla formula per la derivate

Dimostrazione

del prodotto di funzioni

$$\frac{d}{dx}(f\cdot g)(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \qquad \forall x \in I$$

Integro su $[a,b]$ i 2 membri di questa identità

$$\int_a^b \frac{d}{dx}(f\cdot g)(x)\,dx = \int_a^b f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\,dx$$

$$\xleftarrow{} \parallel \qquad\qquad\qquad\qquad \parallel$$

2° Teor. fondam. del calcolo

$$[f\cdot g]_a^b \qquad\qquad \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

(infatti, una primitiva di $\frac{d}{dx}(f\cdot g)$ è $f\cdot g$ .....)

→ e questa è la tesi. ☒

Osservazioni

- la formula vale anche per integrali indefiniti

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$$

$\downarrow$

è uguaglianza fra integrali indefiniti, cioè insiemi di primitive.

- $$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = \underbrace{[f(x)g(x)]_a^b}_{} - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

  riconduce il calcolo di $\boxed{\int_a^b f'g}$ al calcolo di $\boxed{\int_a^b fg'}$ (la derivata è stata "scaricata" dalla f alla g).
  L'idea è: passare dall'"integrale difficile" $\int_a^b f'g$ all'integrale "più semplice" $\int_a^b fg'$.

- Operativamente, per applicare l'integrazione per parti al calcolo di

$$\int_a^b h(x)k(x)\,\mathrm{d}x$$

bisogna scegliere, fra h e k,

- quale ha il ruolo di f',
- quale ha il ruolo di g.

$$\int_a^b f'g = -\int_a^b fg' + [fg]_a^b$$

Per esempio, se $h \sim f'$, $k \sim g$, allora

$$\int_a^b h(x)k(x)\,dx = -\int_a^b H(x)k'(x)\,dx + [Hk]_a^b$$

con $H'(x) = h(x)$, cioè H primitiva di h

da sinistra verso destra:

- integro h (cioè ne calcolo una primitiva H)
- derivo k

- Per applicare efficacemente la formula di integrazione per parti, è fondamentale scegliere bene quale delle due funzioni derivare e quale integrare.

Miscellanea di integrali per parti

Prodotto di un polinomio per una funzione trigonometrica

Sia $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione polinomiale e sia* $\alpha \neq 0$*:*

$$\int_a^b P(x)\sin(\alpha x)\,\mathrm{d}x \quad \left(\text{oppure } \int_a^b P(x)\cos(\alpha x)\,\mathrm{d}x\right)$$

Applichiamo la formula di integrazione per parti con le scelte

$$\begin{cases} f' \leftrightarrow \sin(\alpha x) & (\text{oppure } f' \leftrightarrow \cos(\alpha x)) \\ g \leftrightarrow P(x), \end{cases}$$

ottengo ancora funz. trigonometrica

otterrò polinomio di grado + basso

cioè **integriamo la funzione trigonometrica** e **deriviamo il polinomio**.

Esempio

$$\int_0^1 x\cos(2x)\,\mathrm{d}x$$

$$f(x) = x \longleftarrow g \rightsquigarrow g'(x) = 1$$

$$= \cos(2x) \longleftarrow f' \rightsquigarrow f(x) = \frac{\sin(2x)}{2}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 x \cos(2x)\, dx$$

$$= -\int_0^1 \frac{\sin(2x)}{2}\, dx + \left[\frac{\sin(2x)}{2} \cdot x\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\cos(2x)}{2}\right]_0^1 + \left[x \frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^1$$

$$= \dots\dots$$

Può essere necessario applicare l'integrazione per parti ripetutamente, per es.

$$\int_1^2 \underbrace{x^3}_{g} \underbrace{\sin(x)}_{f'}\,\mathrm{d}x$$

$$f(x) = -\cos(x)$$

$$g'(x) = 3x^2$$

$$= -\int_1^2 (-\cos(x)) \cdot 3x^2\,dx + \Big[x^3(-\cos(x))\Big]_1^2$$

$$= -8\cos(2) + \cos(1) + \underbrace{\int_1^2 3x^2\cos(x)\,dx}_{\text{riapplico la formula per parti}}$$

$$\int_1^2 \underbrace{3x^2}_{g} \underbrace{\cos(x)}_{f'}\,dx =$$

$$f(x) = \sin(x)$$

$$g'(x) = 6x$$

$$= -\int_1^2 6x\sin(x)\,dx + \left[3x^2\sin(x)\right]_1^2$$

$$= 12\sin(2) - 3\sin(1) - \underbrace{\int_1^2 6x\sin(x)\,dx}_{\text{applico l'integraz. per parti}}$$

$$\int_1^2 \underbrace{6x}_{g}\,\underbrace{\sin(x)}_{f'}\,dx =$$

$f(x) = -\cos(x)$

$g'(x) = 6$

$$= -\underbrace{\int_1^2 6(-\cos(x))\,dx}_{\text{integrale immediato!}} + \left[6x(-\cos(x))\right]_1^2$$

- Ho integrato per parti 3 volte e 3 = grado $P(x)$

Prodotto di un polinomio per una funzione esponenziale.

Sia $P:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *una funzione* *polinomiale* *e sia* $\alpha \neq 0$*.*

$$\int P(x)e^{\alpha x}\,\mathrm{d}x.$$

Applichiamo la formula di integrazione per parti con le scelte

$$\begin{cases} f' \leftrightarrow e^{\alpha x}, \\ g \leftrightarrow P(x), \end{cases}$$

così il polinomio si abbassa di grado

cioè **integriamo la funzione esponenziale e deriviamo il polinomio**.

↳ otteniamo ancora una funz. esponenziale

Esempio

$$\int_0^2 \overset{g}{x}\,\underset{f'}{e^{2x}}\,\mathrm{d}x$$

$P(x) = x$

$f(x) = \frac{e^{2x}}{2}$

$g'(x) = 1$

$$= -\int_0^2 \frac{e^{2x}}{2}\,dx + \left[x\,\frac{e^{2x}}{2} \right]_0^2$$

$$= -\left[\frac{e^{2x}}{4} \right]_0^2 + \left[x\,\frac{e^{2x}}{2} \right]_0^2$$

$$= -\frac{e^4}{4} + \frac{1}{4} + \frac{2e^4}{2} - 0 = \dots$$

$$\sinh(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} \qquad \cosh(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

Prodotto di un polinomio per una funzione iperbolica. → come per le funz. esponenziali

Sia $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione polinomiale e sia $\alpha \neq 0$:

$$\int_a^b P(x) \sinh(\alpha x) \, \mathrm{d}x \quad \left(\text{oppure } \int_a^b P(x) \cosh(\alpha x) \, \mathrm{d}x\right)$$

Applichiamo la formula di integrazione per parti con le scelte

$$\begin{cases} f' \leftrightarrow \sinh(\alpha x) \quad (\text{oppure } f' \leftrightarrow \cosh(\alpha x)) \\ g \leftrightarrow P(x), \end{cases}$$

cioè **integriamo la funzione iperbolica e deriviamo il polinomio**.

Prodotto di un polinomio per una funzione logaritmica.

Sia $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione* *polinomiale* *e sia* $\alpha \neq 0$. *Siano* $\boxed{0 < a < b}$:

$$\int_a^b P(x) \ln(\alpha x) \,\mathrm{d}x.$$

Applichiamo la formula di integrazione per parti con le scelte

$$\begin{cases} f' \leftrightarrow P(x), \\ g \leftrightarrow \ln(\alpha x), \end{cases} \Rightarrow \int g' f \text{ sarà}$$

l'integrale di una funz. razionale fratta

cioè **integriamo il polinomio** e **deriviamo la funzione logaritmica**.

Esempio

$$\int_1^3 \underbrace{x}_{f'} \underbrace{\ln(2x)}_{g} \,\mathrm{d}x$$

$P(x) = x$

$$= -\int_1^3 \frac{x^{\cancel{2}}}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}\,dx$$

$$+\left[\frac{x^2}{2}\ln(2x)\right]_1^3$$

$f'(x)=x \Rightarrow f(x)=\frac{x^2}{2}$

$g(x)=\log(2x)$

$=\log(2)+\log(x)$

$\Rightarrow g'(x)=\frac{1}{x}$

$$= -\int_1^3 \frac{x}{2}\,dx + \frac{9}{2}\log(6) - \frac{1}{2}\overbrace{\log(1)}^{=0}$$

$= \ldots\ldots$

Esempio

$$\int_1^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \underbrace{1}_{\overset{\shortparallel}{f'(x)}} \cdot \underbrace{\ln(x)}\,dx$$

applicate la formula con

$$f'(x) = f'(x) = 1 \longrightarrow f(x) = x$$

$$g(x) = \log(x) \longrightarrow g'(x) = \frac{1}{x}$$

$$= -\int_1^2 x \cdot \frac{1}{x}\,dx + [x\log(x)]_1^2$$

$$= \dots$$

Prodotto di un polinomio per l'arcotangente.

Sia $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione polinomiale e sia* $\alpha \neq 0$.

$$\int_a^b P(x) \arctan(\alpha x) \, \mathrm{d}x.$$

Applichiamo la formula di integrazione per parti con le scelte

$$\begin{cases} \underline{f'} \leftrightarrow \underline{P(x)}, \\ g \leftrightarrow \arctan(\alpha x), \end{cases} \Longrightarrow \int f g' \text{ è l'integrale di una funz. raz. fratta}$$

ottengo un polinomio ↑

cioè **integriamo il polinomio e deriviamo la funzione arcotangente**

$$(\arctan(\alpha x))' = \frac{\alpha}{1+\alpha^2 x^2}$$

Esempio

$$\int_0^1 \underbrace{x}_{f'} \underbrace{\arctan(x)}_{g} \, \mathrm{d}x$$

$$f(x) = \frac{x^2}{2}$$

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$= -\int_0^1 \frac{x^2}{2(1+x^2)}\,dx + \left[\frac{x^2}{2}\cdot \arctan(x)\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\arctan(1)}_{\frac{\pi}{4}} - 0 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\,dx$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\left[x - \arctan(x)\right]_0^1 = \dots$$

Integrazione per sostituzione

Esempio

Come integrare

$$\int_0^1 \sin^2(t)\arctan(\sin(t))\cos(t)\,dt??$$

Intuitivamente: ponendo

$$x = \sin(t), \quad \text{cioè} \quad t = \arcsin(x),$$

ottengo il termine $\boxed{x^2\arctan(x)}$, che so come trattare (integrando per parti).

- Come diventa il termine $\cos(t)\,dt$?
- come diventano gli estremi di integrazione?

La formula di integrazione per sostituzione ci dice come si trasforma l'integrale dopo il cambiamento di variabile

$$x = \varphi(t) \ \Leftrightarrow \ t = \varphi^{-1}(x)$$

tramite una φ invertibile.

Formula di integrazione per sostituzione

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e sia $\boxed{x = \varphi(t)}$ un cambiamento di variabile tale che

$$\varphi : I \to \mathbb{R} \text{ è derivabile con derivata continua: } \varphi \in \mathrm{C}^1(I).$$

Allora:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.}$$

- Vi è anche una versione per gli integrali indefiniti.

Struttura di

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

$$\begin{array}{lcl} f(x) & \rightsquigarrow & f(\varphi(t)) \\ dx & \rightsquigarrow & \varphi'(t)\,dt \\ \int_a^b & \rightsquigarrow & \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} \end{array}$$

N.B.: si può applicare la formula in due modi:

- $t \to x = \varphi(t)$, come in

(da DS→SN)

$$\int_0^1 \sin^2(t)\arctan(\sin(t))\cos(t)\,dt \longrightarrow x = \varphi(t) = \sin(t)$$

- $x \to t$ si cerca di effettuare sostituzioni in modo che

da SN→DS

$$\int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

sia più **facile da calcolare!**

♣ Osservazione:

- integrazione per parti $\sim$ integrazione di un prodotto di funzioni $\rightsquigarrow$ la dimostrazione della formula di integ. per parti è basata su formula per la derivata del prodotto di funzioni
- integrazione per sostituzione $\sim$ integrazione tramite cambiamento di variabile $\rightsquigarrow$ la dimostrazione della formula di integ. per sostituzione è basata su formula per la derivata della composizione di funzioni

$$\int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_a^b f(x)\,dx$$

Esempio iniziale

$$\int_0^1 \sin^2(t)\arctan(\sin(t))\cos(t)\,dt$$

$t \longrightarrow \quad x = \sin(t) =: \varphi(t)$

$f(x) = x^2 \arctan(x)$

$\cos(t)dt = \varphi'(t)dt \longrightarrow dx$

$\int_0^1 \longrightarrow \int_a^b$ con

$0 = \varphi^{-1}(a) \Leftrightarrow a = \varphi(0) = \sin(0) = 0$

$1 = \varphi^{-1}(b) \Leftrightarrow b = \varphi(1) = \sin(1)$.

Applicando la formula, l'integrale

diventa $\int_0^{\sin(1)} x^2 \arctan(x)\, dx$

che tratto per parti

Esempio 1

$$\int_{\ln 2}^{7} \frac{(e^x)^2}{\sqrt{e^x - 1}}\, dx.$$

Passo da $x \to t = e^x = \varphi^{-1}(x)$

$(\Leftrightarrow x = \log(t) = \varphi(t))$

$dx \to \varphi'(t)\, dt = \frac{dt}{t}$

$$\int_a^b \longrightarrow \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)}$$

$\Rightarrow$ $a = \log(2) \to \varphi^{-1}(a) = e^{\log(2)} = 2$

$b = 7 \longrightarrow \varphi^{-1}(b) = e^7$

$$\int_{\log(2)}^{7} \frac{(e^x)^2}{\sqrt{e^x-1}}\,dx = \int_{2}^{e^7} \frac{t^{\cancel{2}}}{\sqrt{t-1}} \frac{dt}{\cancel{t}}$$

$$= \int_{2}^{e^7} \frac{t}{\sqrt{t-1}}\,dt$$

$$= \int_{2}^{e^7} \frac{t-1+1}{\sqrt{t-1}}\,dt$$

$$= \int_{2}^{e^7} \Big(\underbrace{\sqrt{t-1}}_{(t-1)^{\frac{1}{2}}} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{t-1}}}_{(t-1)^{-\frac{1}{2}}} \Big)\,dt$$

$$= \dots\dots$$

Esempio 2

$$\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\, dx.$$

Strategia per integrare funzioni che contengono termini con radicali: effettuare la sostituzione in modo da *eliminare* il radicale.

$$x \longrightarrow s := \sqrt{x+1}$$

$$\Longleftrightarrow \quad x+1 = s^2 \Leftrightarrow x = s^2 - 1$$

$$=: \varphi(s)$$

$$dx \longrightarrow \varphi'(s)ds = 2s\,ds$$

$\int_0^2 dx$: x varia fra 0 e 2

$\Downarrow$

$s = \sqrt{x+1}$ varia fra

$\sqrt{0+1} = \underline{1}$ e $\sqrt{2+1} = \underline{\sqrt{3}}$

$$\Rightarrow \int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{s^2-1}{\cancel{s}}\, 2\cancel{s}\, ds$$

$$= 2\int_1^{\sqrt{3}} (s^2-1)\,ds$$

$$= - \qquad \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

Esempio 3

$$\int_0^1 s^3 e^{s^2}\, ds.$$