Esercizi sugli integrali impropri

Esercizio 1. Studiare
$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^4-1}}\,dx.$$

Svolgimento: è un integrale improprio, in quanto
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^4-1}},\ x \in (1,2] \text{ ha una singolarità in 1:}$$
$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{\sqrt{x^4-1}} = +\infty.$$
Osserviamo che f è positiva, quindi è possibile applicare i criteri. Inoltre
$$\frac{1}{\sqrt{x^4-1}} = \frac{1}{\sqrt{(x^2-1)(x^2+1)}} = \frac{1}{\sqrt{(x-1)(x+1)}\sqrt{x^2+1}}$$
Siccome $\lim_{x\to 1^+}\sqrt{x+1} = \sqrt{2}$ e $\lim_{x\to 1^+}\sqrt{x^2+1} = \sqrt{2}$, si ha
$$\frac{1}{\sqrt{x^4-1}} \sim \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x-1}} \quad \text{per } x \to 1^+.$$
Per il criterio del confronto asintotico, $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^4-1}}\,dx$ converge se e solo se converge
$$I := \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx.$$
Con il cambiamento di variabile $z = x-1$, abbiamo
$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{z}}\,dz$$
che è del tipo $\int_0^1 \frac{1}{z^\alpha}\,dz$, con $\alpha = \frac{1}{2}$.
$$\alpha = \frac{1}{2} < 1 \ \Rightarrow\ \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{z}}\,dz \text{ converge.}$$
Quindi
$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^4-1}}\,dx \text{ CONVERGE.}$$

Esercizio 2. Studiare
$$\int_0^1 \frac{1}{x\sin(x)}\,dx.$$

Svolgimento: è un integrale improprio su $(0,1]$, con una singolarità in 0, poiché

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x\sin(x)} = +\infty.$$

La funzione $x \mapsto \frac{1}{x\sin(x)}$ è positiva, quindi possiamo applicare i criteri. Ricordando che $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, abbiamo

$$\frac{1}{x\sin(x)} \sim \frac{1}{x^2} \quad \text{per } x \to 0^+,$$

quindi per il criterio del confronto asintotico $\int_0^1 \frac{1}{x\sin(x)}\,dx$ converge se e solo se converge

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx.$$

che DIVERGE. Allora

$$\int_0^1 \frac{1}{x\sin(x)}\,dx \text{ DIVERGE.}$$

Esercizio 3. Studiare

$$I = \int_0^2 \frac{\cos(x)}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,dx.$$

Svolgimento: la funzione integranda ha una singolarità in $x = 1$: si ha

$$\lim_{x\to 1} \frac{\cos(x)}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = +\infty.$$

Siccome 1 è un punto interno a $(0,2)$,

$$I \text{ converge se e solo se}$$
$$\int_0^1 \frac{\cos(x)}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,dx \textbf{ e } \int_1^2 \frac{\cos(x)}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,dx \text{ convergono.}$$

Siccome $f(x) = \frac{\cos(x)}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$ è positiva per $x \in (0,\pi/2)\setminus\{1\}$, quindi in un intorno di 1, si possono usare i criteri per studiare gli integrali di cui sopra. Si ha

$$\frac{\cos(x)}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} \sim \frac{\cos(1)}{(x-1)^{2/3}} \quad \text{per } x \to 1,$$

quindi

- $\int_1^2 \frac{\cos(x)}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,dx$ converge se e solo se converge

  $$I_1 = \int_1^2 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,dx.$$

  Ponendo $z = (x-1)$, si ha

  $$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{z^{2/3}}\,dx \quad \text{CONVERGENTE}$$

- $\int_0^1 \frac{\cos(x)}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,dx$ converge se e solo se converge

  $$\int_0^1 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,dx.$$

Ponendo $z = (1-x)$, si ha

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,dx &= \int_1^0 \frac{1}{(z^2)^{1/3}}\cdot(-1)\,dz\\ &= \int_0^1 \frac{1}{z^{2/3}}\,dz \quad \text{CONVERGENTE.}\end{aligned}$$

Quindi

$$\int_0^2 \frac{\cos(x)}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,dx \quad \text{CONVERGE.}$$

Esercizio 4. Studiare al variare di $\boxed{\alpha \in \mathbb{R}}$

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x^7)}{x^\alpha \ln(1+x^3)}\,dx.$$

Svolgimento: è integrale improprio sull'intervallo aperto $(0,+\infty)$ (infatti la funzione integranda non è definita in $x=0$). L'integrale converge se e solo se

$$\begin{aligned}&\int_0^1 \frac{\arctan(x^7)}{x^\alpha \ln(1+x^3)}\,dx \text{ converge } \mathbf{E}\\ &\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x^7)}{x^\alpha \ln(1+x^3)}\,dx \text{ converge.}\end{aligned}$$

Notare che la funzione integranda è positiva $\Rightarrow$ OK i criteri.

1. Ricordiamo gli sviluppi per $y \to 0$:

$$\arctan(y) = y + o(y), \quad \ln(1+y) = y + o(y).$$

Quindi

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan(x^7)}{x^\alpha \ln(1+x^3)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^7}{x^\alpha \cdot x^3} = \lim_{x\to 0^+} x^{4-\alpha}.$$

Allora, se $4-\alpha \geq 0$, cioè $\boxed{\alpha \leq 4}$, la funzione non ha una singolarità in $x=0$, e anzi si può estendere per continuità a $[0,1]$, ponendo

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} \frac{\arctan(x^7)}{x^\alpha \ln(1+x^3)} & \text{se } x > 0,\\ \lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan(x^7)}{x^\alpha \ln(1+x^3)} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 4\\ 1 & \text{se } \alpha = 4\end{cases} & \text{se } x = 0.\end{cases}$$

In particolare, per $\boxed{\alpha \leq 4}$ si ha integrabilità su $(0,1]$.

Per $\boxed{\alpha > 4}$ la funzione ha una singolarità in $x=0$, e si ha

$$\frac{\arctan(x^7)}{x^\alpha \ln(1+x^3)} \sim \frac{1}{x^{\alpha-4}} \quad \text{per } x \to 0^+,$$

quindi $\int_0^1 \frac{\arctan(x^7)}{x^\alpha \ln(1+x^3)}\,dx$ converge se e solo se converge

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha-4}}\,dx \quad \rightsquigarrow \quad \text{converge se e solo se } \boxed{\alpha-4} < 1.$$

Quindi

$$\int_0^1 \frac{\arctan(x^7)}{x^\alpha \ln(1+x^3)}\,dx \text{ converge se e solo se } \boxed{\alpha < 5}.$$

2. Siccome $\lim_{y\to+\infty}\arctan(y)=\frac{\pi}{2}$ e $\ln(1+y)\sim\ln(y)$ per $y\to+\infty$, si ha

$$\frac{\arctan(x^7)}{x^\alpha\ln(1+x^3)}\sim\frac{\pi}{2}\frac{1}{x^\alpha\cdot\ln(x^3)}=\frac{\pi}{6}\frac{1}{x^\alpha\ln(x)}.$$

Ora osservo che

$$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha\ln(x)}\,dx \text{ converge se e solo se } \alpha>1.$$

Quindi posso osservare che

$$\int_1^{\infty}\frac{\arctan(x^7)}{x^\alpha\ln(1+x^3)}\,dx\text{converge se e solo se convergono }\int_1^{2}\frac{\arctan(x^7)}{x^\alpha\ln(1+x^3)}\,dx\text{e}\int_2^{\infty}\frac{\arctan(x^7)}{x^\alpha\ln(1+x^3)}\,dx.$$

Siccome f non ha singolarità in $[1,2]$, $\int_1^2\frac{\arctan(x^7)}{x^\alpha\ln(1+x^3)}\,dx$ è infatti un integrale di Riemann per ogni α. Mentre, dal confronto con $\frac{1}{x^\alpha\ln(x)}$ e dallo studio di $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha\ln(x)}\,dx$ ho che

$$\int_2^{\infty}\frac{\arctan(x^7)}{x^\alpha\ln(1+x^3)}\,dx \text{ converge se e solo se } \alpha>1.$$

Allora

$$\int_0^{+\infty}\frac{\arctan(x^7)}{x^\alpha\ln(1+x^3)}\,dx \text{ converge se e solo se } \boxed{\alpha\in(1,5)}.$$

Esercizio 5. Studiare al variare di $\boxed{\alpha\in\mathbb{R}}$

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{(\sinh(x))^\alpha}{e^{3x}-1}\,dx.$$

Svolgimento: è integrale improprio sull'intervallo <u>aperto</u> $(0,+\infty)$ (infatti la funzione integranda non è definita in $x=0$). L'integrale converge se e solo se

$$\int_0^{1}\frac{(\sinh(x))^\alpha}{e^{3x}-1}\,dx \text{ converge } \mathbf{E}$$
$$\int_1^{+\infty}\frac{(\sinh(x))^\alpha}{e^{3x}-1}\,dx \text{ converge.}$$

Notare che la funzione integranda è positiva $\Rightarrow$ OK i criteri.

1. Ricordiamo gli sviluppi per $y\to0$:

$$\sinh(y)=y+o(y),\quad \exp(y)-1=y+o(y).$$

Quindi

$$\lim_{x\to0^+}\frac{(\sinh(x))^\alpha}{e^{3x}-1}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^\alpha}{3x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to0^+}x^{\alpha-1}.$$

Allora, se $\alpha-1\geq0$, cioè $\boxed{\alpha\geq1}$, la funzione non ha una singolarità in $x=0$ e si ha integrabilità. Per $\boxed{\alpha<1}$ la funzione ha una singolarità in $x=0$, e si ha

$$\frac{(\sinh(x))^\alpha}{e^{3x}-1}\sim\frac{1}{3}\frac{1}{x^{1-\alpha}}\quad\text{per } x\to0^+,$$

quindi $\int_0^1\frac{(\sinh(x))^\alpha}{e^{3x}-1}\,dx$ converge se e solo se converge

$$\int_0^1\frac{1}{x^{1-\alpha}}\,dx\quad\rightsquigarrow\quad\text{converge se e solo se } 1-\alpha<1.$$

Quindi
$$\int_0^1 \frac{(\sinh(x))^\alpha}{e^{3x}-1}\,dx \text{ converge se e solo se } \boxed{\alpha > 0}.$$

2. Siccome $\sinh(x) = (e^x - e^{-x})/2$, si ha
$$\frac{(\sinh(x))^\alpha}{e^{3x}-1} \sim \frac{1}{2^\alpha}\frac{e^{\alpha x}}{e^{3x}} \quad \text{per } x \to +\infty,$$
e
$$\int_1^{+\infty} e^{(\alpha-3)x}\,dx \text{ converge se e solo se } \alpha - 3 < 0.$$

Allora
$$\int_0^{+\infty} \frac{(\sinh(x))^\alpha}{e^{3x}-1}\,dx \text{ converge se e solo se } \boxed{\alpha \in (0,3)}.$$

ALTRA FAMIGLIA DI INTEGRALI IMPROPRI CON CARATTERE NOTO:

$$\int_0^{+\infty} e^{\gamma x}\,dx \quad \begin{cases} \text{converge se e solo se} & \gamma < 0, \\ \text{diverge se e solo se} & \gamma \geq 0, \end{cases}$$
$$\int_{-\infty}^{0} e^{\gamma x}\,dx \quad \begin{cases} \text{converge se e solo se} & \gamma > 0, \\ \text{diverge se e solo se} & \gamma \leq 0. \end{cases}$$

Esercizio 6. Studiare al variare di $\boxed{\beta \in \mathbb{R}}$
$$I = \int_0^{1/2} \frac{(\sin(x))^{x+2}|\ln(x)|^\beta}{\ln(1+x^3)}\,dx.$$

Svolgimento: è una funz. positiva: ok i criteri. Osserviamo che
$$\begin{aligned}(\sin(x))^{x+2} &= (\sin(x))^2 \sin(x)^x \\ &= (\sin(x))^2 \exp(x\ln(\sin(x))) \quad \forall\, x \in \left(0, \frac{1}{2}\right].\end{aligned}$$

Ricordando che $\sin(x) \sim x$ e $\ln(1+x^3) \sim x^3$ per $x \to 0^+$, si ha per $x \to 0^+$
$$\begin{aligned}\frac{(\sin(x))^{x+2}|\ln(x)|^\beta}{\ln(1+x^3)} &= (\sin(x))^2 \frac{\exp(x\ln(\sin(x)))|\ln(x)|^\beta}{\ln(1+x^3)} \\ &\sim x^2 \frac{\exp(x\ln(x))|\ln(x)|^\beta}{x^3} \\ &\sim \frac{1}{x|\ln(x)|^{-\beta}}\end{aligned}$$

dove abbiamo usato che
$$\lim_{x\to 0^+} \exp(x\ln(x)) = e^0 = 1 \text{ perché } \lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0.$$

Allora $\int_0^{1/2} \frac{(\sin(x))^{x+2}|\ln(x)|^\beta}{\ln(1+x^3)}\,dx$ converge se e solo se
$$\int_0^{1/2} \frac{1}{x|\ln(x)|^{-\beta}}\,dx \text{ converge}$$

e questo è vero se $-\beta > 1$, cioè $\boxed{\beta < -1}$.

Esercizio 7. Studiare al variare di $\boxed{\alpha \in \mathbb{R}}$

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sinh(x^2)}{e^{\alpha(x^2+x)} x^{\alpha/2}}\, dx.$$

Svolgimento: è integrale improprio sull'intervallo <u>aperto</u> $(0, +\infty)$ (infatti la funzione integranda non è definita in $x = 0$). L'integrale converge se e solo se

$$\int_0^1 \frac{\sinh(x^2)}{e^{\alpha(x^2+x)} x^{\alpha/2}}\, dx \text{ converge } \mathbf{E}$$
$$\int_1^{+\infty} \frac{\sinh(x^2)}{e^{\alpha(x^2+x)} x^{\alpha/2}}\, dx \text{ converge.}$$

La funzione integranda è positiva $\Rightarrow$ OK i criteri.

1. Per $x \to 0^+$ si ha $e^{\alpha(x^2+x)} \to 1$. Ricordando $\sinh(y) \sim y$ per $y \to 0$, concludiamo che

$$\frac{\sinh(x^2)}{e^{\alpha(x^2+x)} x^{\alpha/2}} \sim \frac{x^2}{x^{\alpha/2}}$$

   quindi per il criterio del confronto asintotico $\int_0^1 \frac{\sinh(x^2)}{e^{\alpha(x^2+x)} x^{\alpha/2}}\, dx$ converge se e solo se

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha/2-2}}\, dx \text{ converge}$$

   quindi se e solo se $\frac{\alpha}{2} - 2 < 1$, cioè $\boxed{\alpha < 6}$.

2. Per $x \to +\infty$, si ha $\sinh(x^2) \sim \frac{1}{2} e^{x^2}$, quindi

$$\frac{\sinh(x^2)}{e^{\alpha(x^2+x)} x^{\alpha/2}} \sim \frac{1}{2} \frac{1}{\exp(\alpha(x^2+x) - x^2) x^{\alpha/2}}$$
$$= \frac{1}{2} \frac{1}{\exp((\alpha-1)x^2 + \alpha x) x^{\alpha/2}}$$

   Per lo studio di

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\exp((\alpha-1)x^2 + \alpha x) x^{\alpha/2}}\, dx$$

   distinguiamo i casi $\alpha < 1$, $\alpha = 1$, $\alpha > 1$:

   (a) $\alpha > 1$: siccome su $(1, +\infty)$ si ha

$$\exp((\alpha-1)x^2 + \alpha x) > \exp((\alpha-1)x^2) > x^\beta \quad \forall \beta \in \mathbb{R}$$

   si ha

$$\frac{1}{\exp((\alpha-1)x^2 + \alpha x) x^{\alpha/2}} < \frac{1}{x^\beta x^{\alpha/2}} \quad \boxed{\forall \beta \in \mathbb{R}}$$

   e

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\beta x^{\alpha/2}}\, dx \quad \text{CONVERGE se } \beta + \alpha/2 > 1.$$

   Quindi, per il criterio del confronto si ha convergenza per $\boxed{\alpha > 1}$.

(b) $\alpha = 1$: ritrovo

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{e^x x^{1/2}}\, dx$$

che converge perché su $(1, +\infty)$ si ha $e^x > x^\beta$ per ogni $\beta \in \mathbb{R}$, quindi

$$\frac{1}{e^x x^{1/2}} < \frac{1}{x^\beta x^{1/2}} \quad \forall\, x \in (1, +\infty)$$

e

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\beta x^{1/2}}\, dx \quad \text{CONVERGE se } \beta + 1/2 > 1.$$

Quindi si ha convergenza per $\boxed{\alpha = 1}$.

(c) $\alpha < 1$: si ha

$$\int_1^{+\infty} \frac{\exp((1-\alpha)x^2)}{\exp(\alpha x) x^{\alpha/2}}\, dx \quad \text{con } 1 - \alpha > 0.$$

Poiché

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\exp\left(\frac{1-\alpha}{2}x^2\right)}{\exp(\alpha x)} = +\infty$$

si ha per x sufficientemente grande

$$e^{\alpha x} \leq \exp\left(\frac{1-\alpha}{2}x^2\right)$$

quindi

$$\begin{aligned}
\frac{\exp((1-\alpha)x^2}{\exp(\alpha x)x^{\alpha/2}} &\geq \frac{\exp((1-\alpha)x^2)}{\exp\left(\frac{1-\alpha}{2}x^2\right)x^{\alpha/2}} \\
&= \frac{\exp\left(\frac{1-\alpha}{2}x^2\right)}{x^{\alpha/2}} \\
&\geq \frac{x^\beta}{x^{\alpha/2}} \quad \forall\, \beta \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

dove abbiamo usato che

$$\exp\left(\frac{1-\alpha}{2}x^2\right) > x^\beta \quad \forall\, \beta \in \mathbb{R}.$$

Siccome

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^\beta}{x^{\alpha/2}} \quad \text{diverge per } \alpha/2 - \beta < 1,$$

concludiamo con il criterio del confronto che si ha divergenza per $\boxed{\alpha < 1}$.

Allora

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sinh(x^2)}{e^{\alpha(x^2+x)}x^{\alpha/2}}\, dx \text{ converge se e solo se } \alpha \geq 1.$$

Si ha convergenza per $1 \leq \alpha < 6$.

Esercizio 8. <u>Calcolare</u>

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\cosh(2x)}\, dx.$$

Svolgimento:

1. verifichiamo l'integrabilità in senso improprio:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\cosh(2x)}\, dx \text{ e } \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\cosh(2x)}\, dx \text{ convergono.}$$

   - $\cosh(2x) = (e^{2x} + e^{-2x})/2$, quindi per $x \to +\infty$

     $$\frac{1}{\cosh(2x)} \sim \frac{2}{e^{2x}}.$$

     Siccome su $(0, +\infty)$ si ha $e^{2x} > x^{\beta}$ per ogni $\beta \in \mathbb{R}$, si ha

     $$\frac{2}{e^{2x}} < \frac{2}{x^{\beta}} \quad \forall\, x \in (0, +\infty)\ \forall\, \beta \in \mathbb{R}.$$

     Quindi

     $$\int_{0}^{+\infty} \frac{2}{e^{2x}}\, dx \text{ converge.}$$

     Quindi

     $$\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\cosh(2x)}\, dx \text{ converge.}$$

   - Siccome $\cosh(2x)$ è pari, si ha

     $$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\cosh(2x)}\, dx &= \lim_{c \to +\infty} \int_{-c}^{0} \frac{1}{\cosh(2x)}\, dx \\ &= \lim_{c \to +\infty} \int_{0}^{c} \frac{1}{\cosh(2x)}\, dx \\ &= \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\cosh(2x)}\, dx < +\infty \end{aligned}$$

     quindi anche l'integrale su $(-\infty, 0)$ converge.

2. Usando

   $$\cosh(2x) = (e^{2x} + e^{-2x})/2 = \frac{e^{4x} + 1}{2e^{2x}}$$

   calcolo

   $$\begin{aligned} &\lim_{c \to +\infty} \int_{0}^{c} \frac{1}{\cosh(2x)}\, dx \\ &= \lim_{c \to \infty} \int_{0}^{c} \frac{2e^{2x}}{e^{4x} + 1}\, dx \\ &= \lim_{c \to \infty} \int_{1}^{e^{2c}} \frac{1}{t^2 + 1}\, dt \\ &= \lim_{c \to \infty} [\arctan(t)]_1^{e^{2c}} \\ &= \lim_{c \to \infty} (\arctan(e^{2c}) - \arctan(1)) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

   Allora

   $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\cosh(2x)}\, dx = 2 \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\cosh(2x)}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

Esercizio 9. Studiare al variare di $\boxed{\gamma \in \mathbb{R}}$

$$I = \int_0^{1/2} \frac{|\log(x)|^\gamma}{x^{5\gamma}}\, dx.$$

Svolgimento: f è positiva e ha una possibile singolarità in $x = 0$. Osservo che

$$f(x) = \frac{1}{x^{5\gamma} |\log(x)|^{-\gamma}}$$

e ricordo il carattere dell'integrale $\int_0^{1/2} \frac{1}{x^\alpha |\log(x)|^\beta}$: converge se

$$\alpha < 1, \forall \beta \in \mathbb{R} \;\text{ o }\; \alpha = 1, \forall \beta > 1.$$

Allora I converge se e solo se

$$5\gamma < 1 \;\text{ o }\; 5\gamma = 1, -\gamma > 1$$

quindi se e solo se $\boxed{\gamma < \frac{1}{5}}$.

Esercizio 10. Studiare

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\log(3 + \sin(x))}{\sqrt[4]{x^5 + x^3 + \log(x)}}\, dx.$$

Svolgimento: f è positiva perché $3 + \sin(x) \geq 3 - 1 = 2$, e $\log(2) > 0$; f non ha "singolarità al finito". Si ha per $x \to +\infty$

$$\frac{\log(3 + \sin(x))}{\sqrt[4]{x^5 + x^3 + \log(x)}} \sim \frac{\log(3 + \sin(x))}{x^{5/4}}.$$

Quindi studio il carattere di $\int_1^{+\infty} \frac{\log(3+\sin(x))}{x^{5/4}}\, dx$: si ha

$$\log(3 + \sin(x)) \leq \log(4) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

e

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log(4)}{x^{5/4}}\, dx \;\text{ CONVERGENTE.}$$

Quindi l'integrale converge.

Esercizio 11. Studiare

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)}{\exp\left(\cos(x) - \frac{1}{x}\right) - \exp(\cos(x))}\, dx.$$

Svolgimento: Si ha

$$\begin{aligned}
&\frac{\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)}{\exp\left(\cos(x) - \frac{1}{x}\right) - \exp(\cos(x))} \\
&= \frac{\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)}{e^{\cos(x)} e^{-\frac{1}{x}} - e^{\cos(x)}} \\
&= \frac{\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)}{e^{\cos(x)} (e^{-\frac{1}{x}} - 1)}.
\end{aligned}$$

Poiché $x > 1$, si ha $-\frac{1}{x} < 0$ quindi $e^{-\frac{1}{x}} < 1$. Allora f è negativa. Studio la convergenza di

$$\int_1^{+\infty} |f(x)|\,dx = \int_1^{+\infty} (-f(x))\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)}{e^{\cos(x)}(1 - e^{-\frac{1}{x}})}\,dx.$$

e applico criteri per funzioni positive. Non ci sono singolarità "al finito", e si ha

$$\begin{aligned} \sin^2\left(\frac{1}{x}\right) &\sim \left(\frac{1}{x}\right)^2 \quad \text{per } x \to +\infty, \\ 1 - e^{-\frac{1}{x}} &\sim -(-\frac{1}{x}) = \frac{1}{x} \quad \text{per } x \to +\infty, \end{aligned}$$

(cambiamento di variabile $z = \frac{1}{x}$ e sviluppi per $z \to 0$). Quindi per $x \to +\infty$

$$\begin{aligned} |f(x)| = \frac{\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)}{e^{\cos(x)}(1 - e^{-\frac{1}{x}})} &\sim \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{e^{\cos(x)}\frac{1}{x}} \\ &= \frac{1}{xe^{\cos(x)}} \end{aligned}$$

e

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{xe^{\cos(x)}}\,dx \quad \text{diverge}$$

siccome $\frac{1}{xe^{\cos(x)}} \geq \frac{1}{xe^1}$ (qui uso che $\cos(x) \leq 1$, quindi $e^{\cos(x)} \leq e^1$), e $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ diverge. Allora $\int_1^{+\infty} |f(x)|\,dx$ diverge a $+\infty$, quindi

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)}{\exp\left(\cos(x) - \frac{1}{x}\right) - \exp(\cos(x))}\,dx = -\infty.$$