XVII Congresso Unione Matematica Italiana

Risultati di esistenza per modelli di campo di fase quasistazionari e gradient flows non convessi

Riccarda Rossi

in collaborazione con Giuseppe Savaré

Dipartimento di Matematica “F.Casorati”,
Università di Pavia.

riccarda@dimat.unipv.it

Il modello di phase field di Caginalp

per le transizioni di fase solido-liquide

$$\partial_t(\vartheta + \chi) - \Delta\vartheta = f \quad \text{a.e. in } \Omega \times (0,T),$$
$$\eta\partial_t\chi - \Delta\chi + \mathcal{W}'(\chi) = \vartheta \quad \text{a.e. in } \Omega \times (0,T),$$

- $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \leq 3$, è un dominio limitato,
- ϑ è la temperatura relativa del sistema,
- χ è il parametro d'ordine (proporzione locale fra le due fasi),
- $\mathcal{W}$ la funzione *potenziale a doppio pozzo*, $\mathcal{W}(\chi) = \frac{1}{4}(\chi^2 - 1)^2$.

Il modello di phase field quasistazionario

- Vasta letteratura per il phase field di Caginalp: risultati di esistenza, unicità, comportamento per tempi lunghi.
- Pochi risultati per il phase field quasistazionario:

$$\partial_t(\vartheta + \chi) - \Delta\vartheta = f \quad \text{a.e. in } \Omega \times (0,T),$$
$$-\Delta\chi + \mathcal{W}'(\chi) = \vartheta \quad \text{a.e. in } \Omega \times (0,T),$$

- [Plotnikov-Starovoitov'93]: Esistenza con condizioni al contorno *omogenee* di Neumann per χ, di Dirichlet per ϑ.
- [Schätzle2000]: Esistenza con condizioni al contorno *omogenee* di Neumann per χ *e* per ϑ.

Difficoltà matematiche

Il modello di phase-field quasistazionario si deriva *formalmente* dal modello di phase-field standard riscalando la velocità di fase $\partial_t \chi$ con un parametro η

$$\partial_t(\vartheta + \chi) - \Delta\vartheta = f \quad \text{a.e. in } \Omega \times (0,T),$$

$$\eta\partial_t\chi - \varepsilon\Delta\chi + \frac{1}{\varepsilon}\mathcal{W}'(\chi) = \vartheta \quad \text{a.e. in } \Omega \times (0,T),$$

e considerando il limite per $\eta \downarrow 0$.
L'assenza del termine $\partial_t \chi \implies$ scarse stime di compattezza per χ

- Schätzle: esistenza con un argomento *ad hoc*, basato su un funzionale di Lyapunov e raffinati risultati di analisi spettrale, difficilmente adattabile ad altri casi!

Il caso O.D.E.

• Riformuliamo le equazioni in termini dell' energia interna e del sistema

$$e := \vartheta + \chi$$

• Consideriamo l' equazione differenziale ordinaria corrispondente al sistema di phase field quasistazionario (con termine di sorgente nullo)

$$\begin{cases} \partial_t e - \Delta(e - \chi) = 0, \\ -\Delta\chi + \mathcal{W}'(\chi) + \chi = e, \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} e'(t) + (e(t) - \chi(t)) = 0 \\ \mathcal{W}'(\chi(t)) + \chi(t) = e(t) \end{cases}$$

Il caso O.D.E.

- Consideriamo per esempio

$$\mathcal{W}'(x) = \begin{cases} 2(x+1) & x < -\frac{1}{2}, \\ -2x & |x| \leq \frac{1}{2}, \\ 2(x-1) & x > \frac{1}{2}. \end{cases} \quad \mathcal{W}(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & x < -\frac{1}{2}, \\ -x^2 + \frac{1}{2} & |x| \leq \frac{1}{2}, \\ (x-1)^2 & x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

- L'equazione per il parametro d'ordine è

$$\mathcal{W}'(\chi(t)) + \chi(t) = e(t).$$

- Nota: la funzione $x \mapsto \mathcal{W}'(x) + x$ ***non* è monotona!**

Il caso O.D.E.

L'inversa di $x \mapsto \mathcal{W}'(x) + x$ $(\varepsilon = 1)$ è la funzione multivoca g

$$\mathcal{W}'(\chi) + \chi = e \quad \Leftrightarrow \quad \chi \in g(e)$$

$$g = (\mathcal{W}' + I)^{-1} \qquad \text{e} \qquad e \mapsto e - g(e).$$

• Sostituendo la relazione $\chi \in g(e)$ nel sistema di O.D.E., si ottiene l'inclusione differenziale

$$e'(t) + e(t) - g(e(t)) \ni 0$$

che **è *mal* posta!!**

Un principio di selezione variazionale

$$\mathcal{W}'(\chi) + \chi = e$$

è l'equazione di Eulero per il principio di **minimizzazione**

$$\chi \text{ minimizza } \mathbf{\Phi}(e, \cdot\,) := \left(\frac{1}{2} |\cdot - e|^2 + \mathcal{W}(\cdot\,) \right)$$

Consideriamo allora il sistema

$$\begin{cases} e'(t) + (e(t) - \chi(t)) = 0, \\ \mathbf{\Phi}(e(t), \chi(t)) \leq \mathbf{\Phi}(e(t), v) \quad \forall\, v \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Un principio di selezione variazionale

- Introduciamo

$$h(e) := \operatorname{argmin}_v \mathbf{\Phi}(e,v) = \operatorname{argmin}_v \left(\frac{1}{2}|v-e|^2 + \mathcal{W}(v)\right)$$

- Riformuliamo il sistema come

$$\begin{cases} e'(t) + (e(t) - \chi(t)) = 0, \\ \chi(t) \in h(e(t)), \end{cases}$$

da cui l'inclusione differenziale

$$e'(t) + e(t) - h(e(t)) \ni 0.$$

Un principio di selezione variazionale

- Confrontiamo $g = (\mathcal{W}' + I)^{-1}$

$$\text{e} \quad h(e) = \operatorname{argmin}_v \mathbf{\Phi}(e, v)$$

- Il principio di **minimizzazione seleziona** le branche di g; l'equazione $\chi \in h(e)$ è **"migliore"** di $\chi \in g(e)$!!

Un principio di selezione variazionale

- Consideriamo la funzione

$$\phi(e) := \min_v \left(\frac{1}{2}|v-e|^2 + \mathcal{W}(v)\right) = \frac{1}{2}|e|^2 - \sup_v \left(ev - \frac{1}{2}|v|^2 - \mathcal{W}(v)\right)$$

e la sua derivata $D\phi$, definita per $e \neq 0$:

ϕ e $D\phi.$

Un'interpretazione come *gradient flow*

- La mappa $e \mapsto e - h(e)$ è la chiusura nel senso dei grafi $\overline{D\phi}$ di $D\phi$ (ma non la convessificazione!!!)

- Quindi l'inclusione differenziale

$$e'(t) + e(t) - h(e(t)) \ni 0,$$

può essere interpretata come l'equazione di **gradient flow**

$$e'(t) + \overline{D\phi}(e(t)) \ni 0.$$

La nuova strategia

Sostituendo la relazione **non monotona**

$$\mathcal{W}'(\chi) + \chi = e$$

con il **principio di selezione variazionale**

$$\chi \in \; h(e) = \operatorname{argmin}_v \left\{ \frac{1}{2}|v-e|^2 + \mathcal{W}(v) \right\},$$

abbiamo ottenuto l'inclusione differenziale

$$e'(t) + e(t) - h(e(t)) \ni 0$$

- che è migliore della precedente,
- che ha la **struttura** di **un'equazione di gradient flow** per un funzionale ϕ *non convesso*, neppure perturbazione regolare di un convesso!

La nuova strategia

$$\partial_t e - \Delta(e - \chi) = 0 \quad \text{a.e. in } \Omega \times (0,T),$$
$$-\Delta\chi + \mathcal{W}'(\chi) + \chi - e = 0 \quad \text{a.e. in } \Omega \times (0,T).$$

- La seconda è l'eq. di Eulero per il principio di minimizzazione

$$\chi \ \text{ minimizza } \quad \mathbf{\Phi}(e, v) := \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|v - e|^2 + \frac{1}{2}|\nabla v|^2 + \mathcal{W}(v) \right) dx$$

al variare di $v \in H^1(\Omega)$.

- Come nel caso O.D.E., consideriamo il sistema

$$\begin{cases} \partial_t e - \Delta(\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial e}) = 0 \quad \text{a.e. in } \Omega \times (0,T), \\ \mathbf{\Phi}(e, \chi) \leq \mathbf{\Phi}(e, v) \quad \forall \ \ v \in H^1(\Omega). \end{cases}$$

La nuova strategia

- Invertiamo l'operatore di Laplace (per es., con cond. Dir. omog. su $\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial e}$):

$$\begin{cases} (-\Delta)^{-1}\partial_t e + \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial e} = 0 \\ \mathbf{\Phi}(e,\chi) \leq \mathbf{\Phi}(e,v) \quad \forall\, v \in H^1(\Omega), \end{cases}$$

- Come nel caso O.D.E., introduciamo il funzionale

$$\phi(e) := \min_{v \in H^1(\Omega)} \mathbf{\Phi}(e,v) = \min_{v \in H^1(\Omega)} \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|v-e|^2 + \frac{1}{2}|\nabla v|^2 + \mathcal{W}(v) \right) dx.$$

- Interpretiamo il sistema come **l'equazione di gradient flow generalizzata**

$$e'(t) + \partial\phi(e(t)) \ni 0$$

per il funzionale ϕ nello spazio di Hilbert $H^{-1}(\Omega)$.

Una nuova strategia

- Notiamo che il funzionale ϕ

$$\phi(e) = \frac{1}{2}\int_\Omega |e|^2\,dx - \sup_{v\in H^1(\Omega)}\left\{\int_\Omega \left(ev - \frac{1}{2}|v|^2 - \frac{\varepsilon}{2}|\nabla v|^2 - \mathcal{W}(v)\right)\,dx\right\}$$

non è convesso (è dato dalla differenza di due funzionali convessi)

Che cosa è allora $\partial\phi$?

$\Downarrow$

Necessità di una *generalizzazione* della
della nozione classica di sottodifferenziale
per funzionali convessi!

Una nozione di sottodifferenziale
per il caso non convesso

• $\mathscr{H}$ spazio di Hilbert, • $\phi : D(\phi) \subset \mathscr{H} \to (-\infty, +\infty]$ è un funzionale **proprio e s.c.i.**.
• Consideriamo il sottodifferenziale di Fréchet $D_F\phi$ di ϕ:

$$\xi \in D_F\phi(e) \Leftrightarrow \liminf_{w \to e} \frac{\phi(w) - \phi(e) - \langle \xi, w - e \rangle}{\|w - e\|_{\mathscr{H}}} \geq 0$$

• Quando ϕ è convesso , $D_F\phi$ si riduce al sottodifferenziale dell'analisi convessa : la disuguaglianza **locale** diventa **globale**.
• **Sottodifferenziale Limite** $\partial\phi$ Introduciamo la **chiusura forte-debole** $\partial\phi$ di $D_F\phi$ nel senso dei grafi:

$$\xi \in \partial\phi(v) \Leftrightarrow \exists \xi_n \in D_F\phi(v_n) : \, v_n \to v, \, \xi_n \rightharpoonup \xi.$$

• **Considereremo l'equazione di gradient flow per $\partial\phi$.**

Il problema di Cauchy per una equazione di gradient flow in uno spazio di Hilbert

- $\mathscr{H}$ spazio di Hilbert,
- $\phi : \mathscr{H} \to (-\infty, +\infty]$ funzionale **semicontinuo inferiormente,** con dominio $D(\phi)$ e **sottodifferenziale limite** $\partial\phi$,
- $u_0 \in D(\phi)$ dato iniziale

Trova una funzione

$$u : (0, T) \to \mathscr{H}$$

che soddisfi

$$\begin{cases} u'(t) + \partial\phi(u(t)) \ni 0 \quad \text{in } (0, T), \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Gradient flows in spazi di Hilbert: il caso convesso

Se ϕ è *convesso*, $\partial\phi$ è il sottodifferenziale dell'analisi convessa

$$\xi \in \partial\phi(u) \quad \text{iff} \quad \phi(w) - \phi(u) \geq \langle \xi, w - u \rangle \quad \forall\, w \in \mathscr{H}.$$

• $\partial\phi(u)$ è **convesso** e vale la **chain rule**

$$\left.\begin{array}{c} u \in H^1(0,T;\mathscr{H}),\ \ \xi \in L^2(0,T;\mathscr{H}) \\ \xi(t) \in \nabla\phi(u(t)) \text{ per q.o. } t \in (0,T) \end{array}\right\} \Rightarrow \tfrac{d}{dt}\phi(u(t)) = \big\langle \xi(t), u'(t) \big\rangle$$

e quindi **l'identità dell'energia** per la soluzione u dell'equazione di gradient flow

$$\phi(u(T)) - \phi(u_0) = -\textstyle\int_0^T \|u'(t)\|^2_{\mathscr{H}}\, dt.$$

• **Risultati di esistenza e approssimazione: [Kōmura'67, Crandall-Pazy'69, Brézis'73].**

Il caso convesso: approssimazione ed esistenza di soluzioni.

- **Schema di approssimazione di Eulero implicito.** Si fissa un passo temporale $\tau > 0$ e una partizione $t_0 = 0,\ t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_N = T$ di (0,T). Si risolve ricorsivamente **l'equazione discreta**

$$\frac{U^n - U^{n-1}}{\tau} + \nabla\phi(U^n) \ni 0 \quad n = 1, \ldots, N, \quad \text{con } U^0 = u_0.$$

Sia $\hat{U}_\tau(t)$ l'interpolata lineare a tratti delle soluzioni $\{U^n\}$.

- **Stime a priori.** Dalla disuguaglianza dell'energia discreta $\Longrightarrow$ stime a priori e compattezza per la successione $\{\hat{U}_\tau(t)\}$.
- **Passaggio al limite.** Grazie alla chiusura forte-debole di $\nabla\phi$, si passa al limite nell'equazione discreta: il limite uniforme u di $\{\hat{U}_\tau(t)\}$ risolve l'equazione di gradient flow.

Vedi: [Kōmura'67, Crandall-Pazy'69, Brézis'73].

Teorema di esistenza

Sia $\phi : \mathscr{H} \to \mathbb{R}$ proprio, s.c.i. e coercivo .

Supponiamo che $\partial\phi$ soddisfi la **chain rule** :

$$\left.\begin{array}{r} v \in H^1(0,T;\mathscr{H}), \\ \xi \in L^2(0,T;\mathscr{H}) \\ \xi(t) \in \partial\phi(v(t)) \text{ a.e. in } (0,T) \end{array}\right\} \Rightarrow \phi(v(t)) - \phi(v(s)) = \int_s^t \left\langle \xi(r), v'(r) \right\rangle dr$$

- Allora il problema di Cauchy

$$u'(t) + \partial\phi(u(t)) \ni 0 \quad \text{per q.o. } t \in (0,T), \quad u(0) = u_0$$

ammette una soluzione $u \in H^1(0,T;\mathscr{H})$ t.c. la funzione $t \to \phi(u(t))$ è decrescente e vale **l'identità dell'energia**

$$\phi(u(t)) - \phi(u(s)) = -\int_s^t \|u'(r)\|^2_{\mathscr{H}}\, dr \, \forall\ 0 \ \le s \le t \le T.$$

Schema della dimostrazione

• **Approssimazione.** Risolviamo ricorsivamente l'equazione discreta

$$\frac{U^n - U^{n-1}}{\tau} + D_F\phi(U^n) \ni 0 \quad n = 1, \ldots, N.$$

Consideriamo l'interpolata lineare a tratti $\hat{U}_\tau$ delle soluzioni discrete U^n, e l'interpolata **variazionale** $\tilde{U}_\tau$

$$\tilde{U}_\tau(t) \in \min_{v \in \mathscr{H}} \left\{ \frac{\|v - U^{n-1}\|^2_{\mathscr{H}}}{2(t-(n-1)\tau)} + \phi(v) \right\},$$

introdotta da E. De Giorgi nel quadro della teoria dei ***Movimenti Minimizzanti***.

Schema della dimostrazione

• **Stime a priori.** Vale una versione della disuguaglianza dell'energia per $\tilde{U}_\tau$:

$$\frac{1}{2}\int_0^t \|\hat{U}'_\tau(s)\|^2_{\mathscr{H}}\,ds + \frac{1}{2}\int_0^t \|\partial\phi(\tilde{U}_\tau(s))\|^2_{\mathscr{H}}\,ds + \phi(\tilde{U}_\tau(t)) \leq \phi(u_0).$$

$\Rightarrow$ Si ricavano stime a priori e proprietà di compattezza per le soluzioni approssimate $\{\hat{U}_\tau\}$ e $\{\tilde{U}_\tau\}$, che hanno un limite u nella topologia debole.

• **Passaggio al limite.** Grazie al noto **risultato di compattezza delle misure di Young,** passiamo al limite nella disuguaglianza dell'energia approssimata. Usando la **chain rule**, deduciamo dalla disuguaglianza dell'energia limite che u risolve l'equazione di gradient flow e soddisfa l'identità dell'energia.

Applicazione al phase field quasistazionario

Sia $F : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ un funzionale coercivo, debolmente s.c.i..

(per es., $F(\chi) := \int_\Omega \varepsilon^{-1}\mathcal{W}(\chi) + \varepsilon|\nabla\chi|^2\,dx$).

Sia $\phi : \mathscr{H} = H^{-1}(\Omega) \to (-\infty, +\infty]$

$$\phi(e) := \min_{\chi} \mathbf{\Phi}(e,\chi) = \min_{\chi} \left\{ \frac{1}{2}\int_\Omega |e-\chi|^2\,dx + F(\chi) \right\},\ e \in H^{-1}(\Omega).$$

Allora per ogni $e_0 \in D(\phi)$ esiste una coppia (e,χ) t.c.

$e,\ \chi \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$, $e-\chi \in L^2(0,T;H^1_0(\Omega))$, $\partial_t e \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$,

che risolve il phase field quasistazionario

$$\begin{cases} \partial_t e - \Delta(e-\chi) = 0 \\ \mathbf{\Phi}(e,\chi) \le \mathbf{\Phi}(e,v) \quad \text{for every } v \in H^1(\Omega) \\ e(0) = e_0. \end{cases}$$