Dispense di
Matematica–Analisi Matematica

Riccarda Rossi

Corso di Laurea in Disegno Industriale

Università degli Studi di Brescia

Anno Accademico 2009/2010

Capitolo 1

Nozioni preliminari

Capitolo 2

Prime proprietà delle funzioni

Capitolo 3

Limiti

Capitolo 4

Continuità

Capitolo 5

Derivate

Capitolo 6

Studio di funzioni

6.1 Estremi relativi

Sia $f : I \to \mathbb{R}$. Ricordiamo che un punto $x_0 \in I$ si dice di *punto di massimo assoluto* per f su I se

$$f(x) \leq f(x_0) \qquad \forall\, x \in I\,.$$

Analogamente, $x_0 \in I$ si dice di *punto di minimo assoluto* per f su I se

$$f(x) \geq f(x_0) \qquad \forall\, x \in I\,.$$

Genericamente, chiameremo *punti di estremo assoluto* i punti di massimo/minimo assoluto. I punti di estremo assoluto vengono anche detti *punti di estremo (massimo/minimo) globale*, in quanto nella loro definizione è insito un controllo del comportamento della funzione su tutto il dominio di definizione I. Questo distingue i punti di estremo globale da quelli di *estremo locale*, che ora introduciamo.

Definizione 6.1.1 (Estremi relativi (o locali)). *Sia $f : I \to \mathbb{R}$. Un punto $x_0 \in I$ si dice*

- di minimo relativo (o locale) *per f su I se*

$$\exists\, r > 0 : \quad f(x) \geq f(x_0) \quad \forall\, x \in I \cap (x_0 - r, x_0 + r)\,; \tag{6.1.1}$$

- di massimo relativo (o locale) *per f su I se*

$$\exists\, r > 0 : \quad f(x) \leq f(x_0) \quad \forall\, x \in I \cap (x_0 - r, x_0 + r)\,. \tag{6.1.2}$$

Se x_0 è un punto di estremo (minimo o massimo) relativo (o locale) per f, il corrispondente valore $f(x_0)$ si chiama valore di minimo/massimo relativo (o locale)*.*

Chiaramente, se $x_0 \in I$ è un punti di massimo (minimo, risp.) assoluto, x_0 è anche un punto di massimo (minimo, risp.) relativo, mentre non vale il viceversa.

Esempio 6.1.2 (La funzione doppio pozzo)**.** La disamina del grafico della funzione doppio pozzo $W : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ definita da

$$W(x) = \frac{(x^2-1)^2}{4}$$

mostra che (si osservi che W è pari!)

$$\begin{aligned} W \quad & \text{ha due punti di minimo relativo in } x_1 = -1 \text{ e } x_2 = 1 \\ & \text{e ha un punto di massimo relativo in } x_0 = 0. \end{aligned}$$

Chiaramente, x_1 (e, per parità, anche x_2) è un punto di minimo assoluto per W, in quanto

$$W(x_1) = 0 \leq W(x) = \frac{(x^2-1)^2}{4} \quad \forall\, x \in [-1, 1].$$

Invece, $x_0 = 0$ è solo un punto di massimo relativo, e non assoluto, per W, in quanto

$$W(0) = \frac{1}{4} < W(2) = \frac{9}{4}.$$

Nel seguito, svilupperemo il cosiddetto *metodo differenziale* per la ricerca degli (eventuali) punti di estremo relativo di una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ (con I intervallo!): più precisamente, troveremo delle condizioni necessarie/sufficienti che leghino il fatto che un dato punto è un estremo relativo per f alla derivata f'.

6.1.1 Il teorema di Fermat, o di annullamento della derivata

Consideriamo una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, definita su un intervallo chiuso e limitato. Distinguiamo quattro categorie di punti:

1. gli estremi a, b dell'intervallo di definizione;
2. i punti interni $x \in (a, b)$ tali che $\nexists\, f'(x)$;
3. i punti interni $x \in (a, b)$ tali che esiste $f'(x)$ (finita o infinita), $f'(x) \neq 0$;
4. i punti interni $x \in (a, b)$ tali che esiste $f'(x) = 0$.

Il prossimo teorema afferma che, se $x_0 \in I$ è un punto interno a I in cui esiste $f'(x)$ (cioè un punto nella categoria 3.o 4.), e x_0 è un punto di estremo relativo per f, necessariamente $f'(x_0) = 0$.

Definizione 6.1.3. Sia $f : I \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in I$ un punto interno in cui esiste la derivata. Se $f'(x_0) = 0$, x_0 viene detto *punto critico (o stazionario)* per f.

Teorema 6.1.4 (Fermat)**.** *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in I$ un punto interno. Supponiamo che $\exists\, f'(x_0)$.*

Se x_0 è punto di minimo o di massimo <u>relativo</u> per f su I,
allora $f'(x_0) = 0$.

Si noti che è stato solo supposto che nel punto x_0 esista la derivata $f'(x_0)$: non è stata richiesta la derivabilità (cioè che la derivata esista finita) in x_0.

Osserviamo che l'annullamento della derivata è solo una condizione necessaria, non sufficiente, affinché un dato punto (interno all'intervallo di definizione) x_0 sia di estremo relativo, come mostra il seguente

Esempio 6.1.5. La funzione $f(x) := x^3$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ ha derivata $f'(x) = 3x^2$ per ogni $x \in R$. Quindi l'unico punto critico di f è $x_0 = 0$. Osserviamo che, però, x_0 non è un punto di estremo relativo. Di fatto, f non ha alcun punto di estremo relativo.

Dimostrazione del Teorema di Fermat. Supponiamo, per fissare le idee, che x_0 sia un punto di minimo relativo[1]. Allora, per la (6.1.1) si ha che esiste[2] $r > 0$ tale che $(x_0 - r, x_0 + r) \subset I$ e $f(x) \geq f(x_0)$ per ogni $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$. Consideriamo ora il rapporto incrementale di f relativo al punto x_0, cioè il quoziente $(f(x) - f(x_0))/(x - x_0)$, con $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$. Si ha che

$$\text{per ogni } x \in (x_0, x_0 + r) \qquad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0\,. \tag{6.1.3}$$

In effetti, il numeratore è non negativo grazie alla (6.1.1), e d'altra parte il denominatore è strettamente positivo poiché stiamo prendendo x nell'intervallo $(x_0, x_0 + r)$. Allo stesso modo, si verifica che

$$\text{per ogni } x \in (x_0, x_0 + r) \qquad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0\,. \tag{6.1.4}$$

Passando al limite per $x \to x_0^+$ in (6.1.3), e per $x \to x_0^-$ in (6.1.4), si deduce che

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0\,, \qquad f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0\,.$$

Poiché, d'altra parte, per ipotesi esiste $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$ (si ricordi il teorema che lega derivata e derivate unilatere), deduciamo che, necessariamente, $f'(x_0) = 0$. □

Notiamo che l'ipotesi che x_0 fosse un punto interno all'intervallo I ha giocato un ruolo chiave nella dimostrazione: questo ci ha permesso infatti di considerare "incrementi bilateri" relativi al punto x_0, e quindi di calcolare sia la derivata destra, sia la derivata sinistra di f in x_0. Nel caso in cui un punto di estremo relativo sia in uno degli estremi dell'intervallo di definizione, possiamo solo dare risultati sul segno della corrispondente "derivata unilatera". A questo proposito, diamo la seguente proposizione, la cui facile dimostrazione è lasciata al lettore.

Proposizione 6.1.6. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.*

1. *Supponiamo che a sia un punto di estremo relativo per f e che esista $f'_+(a)$. Si ha che:*
   - *se a è un punto di massimo relativo per f, allora $f'_+(a) \leq 0$;*
   - *se a è un punto di minimo relativo per f, allora $f'_+(a) \geq 0$.*
2. *Supponiamo che b sia un punto di estremo relativo per f e che esista $f'_-(b)$. Si ha che:*
   - *se b è un punto di massimo relativo per f, allora $f'_-(b) \geq 0$;*
   - *se b è un punto di minimo relativo per f, allora $f'_-(b) \leq 0$.*

[1] La dimostrazione si sviluppa in modo analogo (verificarlo per **esercizio!**) nel caso in cui x_0 sia un punto di massimo relativo.

[2] questo grazie al fatto che x_0 è interno ad I!

Applicazioni del Teorema di Fermat allo studio dei punti di estremo relativo. Si consideri un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ e sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Per il Teorema di Weierstrass, f ammette almeno un punto di minimo assoluto su $[a, b]$, e almeno un punto di massimo assoluto su $[a, b]$. Segue dal Teorema di Fermat che i punti di estremo assoluto devono ricadere in queste tre categorie di punti:

1. gli estremi a, b dell'intervallo di definizione;
2. i punti interni $x \in (a, b)$ tali che $\nexists\, f'(x)$;
3. i punti interni $x \in (a, b)$ tali che esiste $f'(x) = 0$.

Osservazione 6.1.7. Chiaramente questo discorso si estende a funzioni definite su intervalli non necessariamente limitati: il teorema di Fermat garantisce gli <u>eventuali</u> (la loro esistenza non è più assicurata dal teorema di Weierstrass, in quanto l'intervallo di definizione non è limitato) punti di estremo relativo vanno ricercati solo nelle categorie 2. e 3., qualora il gruppo di punti 1. sia vuoto.

Allora una possibile strategia per <u>la ricerca dei punti di estremo assoluto</u> di f su $[a, b]$ potrebbe consistere nel considerare tutti i punti nelle tre suddette categorie, calcolare il valore di f in ciascuno di essi, e confrontare i valori ottenuti.

Esempio 6.1.8. Consideriamo la funzione $f(x) := x^2 - 2$, con dominio $D_f = [-3, 2]$. Si ha che $f(-3) = 7$, mentre $f(2) = 2$. Inoltre osserviamo che f è derivabile su $(-3, 2)$ (quindi la categoria 2. è vuota), con derivata $f'(x) = 2x$ per ogni $x \in (-3, 2)$. Quindi f ha un unico punto di annullamento della derivata, dato da $x_0 = 0$. Siccome $f(0) = -2$, concludiamo che 0 è l'unico punto di minimo assoluto per f su $[-3, 2]$. D'altra parte, per confronto fra $f(-3)$ e $f(2)$ vediamo che $x_1 = -3$ è l'unico punto di massimo assoluto per f su $[-3, 2]$.

Osservazione 6.1.9. Il metodo appena illustrato ha due svantaggi: innanzitutto, consente di sviluppare la ricerca solo dei punti di estremo assoluto, e non dei punti di estremo relativo. Secondariamente, può essere disagevole, in quanto implica diversi conti (non solo la ricerca dei punti di annullamento della derivata, ma anche il calcolo di f nei punti delle categorie $1. - 3.$).

In effetti, il Teorema di Fermat, su cui è basato questo metodo, è un risultato relativamente debole, in quanto fornisce condizioni solo necessarie affinché un dato punto sia di estremo relativo.

Nel seguito, svilupperemo degli strumenti più potenti del Teorema di Fermat per la ricerca dei punti di estremo relativo di una data funzione f. In particolare, forniremo delle **condizioni sufficienti** che garantiscano che un dato punto stazionario è un punto di massimo o di minimo relativo, si veda il Teorema 6.3.11 alla fine della Sezione 6.2.

Per dimostrare il Teorema 6.3.11, ci baseremo alcuni risultati, relativamente al legame fra f e la sua derivata f', di natura diversa da quelli visti finora. Sostanzialmente, quest'ultimi risultati (cioè la Proposizione 5.2.9 e il Teorema 6.1.4) hanno un carattere *locale*, in altri termini riguardano solo proprietà locali della funzione (cioè proprietà che valgono solo "vicino" a un punto).

Invece, vedremo nella prossima sezione dei risultati sul legame fra la derivata f' e proprietà *globali* di f (cioè, proprietà che non valgano solo "vicino" a un dato punto, ma globalmente su un intervallo). Segnatamente, ci stiamo riferendo al Teorema 6.3.1, al Teorema 6.3.7, e al Teorema 6.3.11. La dimostrazione di tali risultati sarà basata sul Teorema di Lagrange (anche detto *Teorema del valor medio*).

6.2 Il teorema di Lagrange

6.2.1 Il teorema di Lagrange

Teorema 6.2.1 (Lagrange)**.** *Sia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *verificante*

$$f \text{ è continua in } [a, b] \ (f \in \mathrm{C}^0([a, b])), \tag{6.2.1}$$

$$f \text{ è derivabile in } (a, b). \tag{6.2.2}$$

Allora,

$$\exists\, c \in (a, b) \ : \qquad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)\,. \tag{6.2.3}$$

Chiaramente il punto c di cui nella (6.2.3) "deve" trovarsi in (a, b), perché solo in (a, b) è stata richiesta la derivabilità di f.

Interpretazione geometrica del Teorema di Lagrange. Ricordiamo che la derivata di f in un dato punto è il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di f nel corrispondente punto del grafico. Osserviamo che, d'altra parte, il quoziente $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ è il coefficiente angolare della corda congiungente i punti del grafico $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. Allora, la tesi del Teorema di Lagrange è che, sotto le condizioni (6.2.1)–(6.2.2), esiste un punto $c \in (a, b)$ tale che la retta tangente al grafico di f nel punto $(c, f(c))$ abbia coefficiente angolare uguale alla retta congiungente i punti del grafico $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. Quindi, esiste un punto $c \in (a, b)$ tale che la retta tangente al grafico di f nel punto $(c, f(c))$ sia parallela alla retta congiungente i punti del grafico $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

Osservazioni sul Teorema di Lagrange. Il Teorema 6.2.1 garantisce solo **l'esistenza, e non l'unicità** dei punti c aventi la proprietà specificata dalla (6.2.3), come mostrano i seguenti esempi.

Esempio 6.2.2.

1. Consideriamo la funzione

$$f : [-1, 1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := x^2 \quad \forall\, x \in [-1, 1]\,.$$

In questo caso, $f(1) = f(-1) = 1$, ed esiste un unico punto x_0 tale che $f'(x_0) = (f(1) - f(-1))/(1 - (-1)) = 0$: essendo $f'(x) = 2x$ per ogni $x \in [-1, 1]$, vediamo che $x_0 = 0$.

2. Consideriamo la funzione

$$W : [-2, 2] \to \mathbb{R}, \qquad W(x) := \frac{1}{4}(x^2 - 1)^2 \quad \forall\, x \in [-2, 2]\,.$$

Ora, $W(-2) = W(2)$, quindi $(W(2) - W(-2))/(2 - (-2)) = 0$. Essendo $W'(x) = x^3 - x$, esistono tre punti $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, e $x_3 = 1$ tali che $W'(x_i) = 0$ per $i = 1, 2, 3$.

3. Consideriamo la funzione

$$F : [-2, 2] \to \mathbb{R}, \qquad F(x) := \begin{cases} -x^2 & x \in [-2, -1]\,, \\ -1 & x \in (-1, 1)\,, \\ -x^2 & x \in [1, 2] \end{cases}\,.$$

Ora, $F(-2) = F(2)$, quindi $(F(2) - F(-2))/(2 - (-2)) = 0$. Osserviamo anche che F è continua su $[-2, 2]$ e derivabile su (-2,2)[3]. Inoltre, per ogni $x \in (-1, 1)$ si ha che $F'(x) = 0$, quindi esistono infiniti punti che verifichino la (6.2.3).

Le ipotesi del Teorema 6.2.1 sono ottimali: in effetti, i seguenti esempi mostrano che è sufficiente togliere anche una sola di tali ipotesi perché la (6.2.3) non sia più verificata.

Esempio 6.2.3.

1. La funzione

$$f : [-1, 1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} -x^2 & x \in [-1, 0)\,, \\ 3 & x = 0\,, \\ -x^2 & x \in (0, 1]\,, \end{cases}$$

   è continua su $[-1, 1] \setminus \{0\}$ e derivabile su $(-1, 1) \setminus \{0\}$. Si ha $f'(x) = -2x$ per ogni $x \in (-1, 1) \setminus \{0\}$, quindi in particolare $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in (-1, 1) \setminus \{0\}$. D'altra parte, $f(-1) = f(1)$, e quindi $(f(1) - f(-1))/(1 - (-1)) = 0$.

2. La funzione

$$h : [0, 2] \to \mathbb{R} \quad h(x) := \begin{cases} x + 1 & x \in [0, 2)\,, \\ \frac{1}{2} & x = 2 \end{cases},$$

   è continua su $[0, 2)$ e derivabile su $(0, 2)$, con derivata $h'(x) = 1$ per ogni $x \in (0, 2)$. Si ha che $(h(2) - h(0))/2 = -1/4$, quindi non esiste alcun $c \in (0, 2)$ verificante la (6.2.3).

3. La funzione $g(x) = |x|$, con dominio $D_g = [-1, 1]$, è continua su $[-1, 1]$ e derivabile su $(-1, 1) \setminus \{0\}$. Osserviamo che $g(-1) = g(1)$, quindi $(g(1) - g(-1))/(1 - (-1)) = 0$. D'altra parte, g è derivabile su $(-1, 1) \setminus \{0\}$, con $g'(x) = \mathrm{sign}(x)$ per ogni $x \in (-1, 1) \setminus \{0\}$, e quindi non esiste alcun punto $c \in (-1, 1)$ verificante la (6.2.3).

6.2.2 Il Teorema di Rolle

Per sviluppare la dimostrazione del Teorema di Lagrange, ci serviremo del seguente risultato.

Teorema 6.2.4 (Rolle)**.** *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ verificante*

$$f \text{ è continua in } [a, b] \ (f \in \mathrm{C}^0([a, b])), \tag{6.2.4}$$

$$f \text{ è derivabile in } (a, b), \tag{6.2.5}$$

$$f(a) = f(b)\,. \tag{6.2.6}$$

Allora,

$$\exists\, c \in (a, b) : \quad f'(c) = 0\,. \tag{6.2.7}$$

Osserviamo che il Teorema di Rolle è un caso particolare del Teorema di Lagrange e, conseguentemente, si presta alla medesima interpretazione grafica, nonché alle medesime considerazioni sul fatto che tutte le sue ipotesi sono necessarie (peraltro, si noti che l'Esempio 6.2.2 fornisce anche controesempi alla tesi del Teorema di Rolle qualora si indeboliscano le richieste di continuità/derivabilità).

[3] chiaramente F è derivabile sui singoli intervalli $(-2, -1)$, $(-1, 1)$, e $(1, 2)$. Resta da controllare la derivabilità in $x = \pm 1$. Per esempio in $x = 1$ (essendo F pari, otterremo automaticamente anche la derivabilità in $x = -1$). A questo scopo, si verifichi (**Esercizio!**) che $F'_-(1) = 0 = F'_+(1)$.

Anche questo il teorema di Rolle garantisce solo l'esistenza, e non l'unicità, di punti di annullamento della derivata (si veda l'Esempio 6.2.2).

Dimostrazione. Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è una funzione costante, chiaramente f ha derivata identicamente nulla su $[a, b]$, e quindi la (6.2.7) è banalmente verificata.

Supponiamo allora che f non sia costante su $[a, b]$. Ora, essendo f continua su $[a, b]$, segue dal Teorema di Weierstrass che f ha almeno un punto di minimo assoluto $x_m \in [a, b]$ e almeno un punto di massimo assoluto $x_M \in [a, b]$. Dimostriamo che

$$x_m \in (a, b) \quad \text{o} \quad x_M \in (a, b)\,. \tag{6.2.8}$$

Per assurdo ciò sia falso, quindi x_m, $x_M \in \{a, b\}$. Segue dalla (6.2.6) che

$$f(x_m) = f(x_M). \tag{6.2.9}$$

Tenendo conto della definizione di punto di minimo e punto di massimo assoluto, deduciamo dalla (6.2.9) che f è costante su $[a, b]$, contro la nostra ipotesi iniziale. Allora la (6.2.8) deve essere vera. Supponiamo per esempio che $x_m \in (a, b)$. Allora, per il Teorema di Fermat $f'(x_m) = 0$. Scegliamo quindi $c = x_m$. □

Dimostrazione del Teorema di Lagrange. Introduciamo la funzione ausiliaria

$$g : [a, b] \to \mathbb{R}, \qquad g(x) := f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right) \quad \forall\, x \in [a, b]\,.$$

Si noti che g è di fatto data dalla differenza fra f e la funzione (lineare) il cui grafico è la retta congiungente i punti del grafico $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.
Osserviamo che:

- $g \in \mathrm{C}^0([a, b])$ (in quanto è data da somme/prodotti di funzioni continue su $[a, b]$);
- g è derivabile su (a, b) (in quanto è data da somme/prodotti di funzioni derivabili su (a, b));
- $g(a) = g(b) = 0$.

Allora g soddisfa le ipotesi del Teorema di Rolle. Essendo

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad \forall\, x \in (a, b)\,,$$

dalla (6.2.7) segue che esiste $c \in (a, b)$ tale che $0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, cioè la (6.2.3). □

6.3 Applicazioni del Teorema di Lagrange

Come abbiamo già accennato, le principali applicazioni del teorema di Lagrange sono risultati che permettono di dedurre proprietà globali di una data funzione a partire da proprietà della sua derivata. Si noti che, nelle dimostrazioni di questi risultati, il Teorema di Lagrange non viene applicato su tutto l'intervallo di definizione, ma su opportuni sottointervalli. l

Il primo di tali risultati è il cosiddetto

6.3.1 Teorema della derivata nulla

Teorema 6.3.1. *Sia* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *una funzione derivabile sul* (a, b). *Supponiamo che*

$$f'(x) = 0 \qquad \forall\, x \in (a, b)\,. \tag{6.3.1}$$

Allora, f *è costante su* (a, b), *cioè esiste* $K \in \mathbb{R}$ *tale che* $f(x) = K$ *per ogni* $x \in (a, b)$.

Osservazione 6.3.2. Osserviamo che l'ipotesi che il dominio sia un intervallo è cruciale: in effetti, la funzione sign è derivabile sul suo dominio, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, con derivata nulla. Ma sign non è costante.

Dimostrazione. È sufficiente dimostrare che, fissato $\bar{x} \in (a, b)$, si ha che

$$f(x) = f(\bar{x}) \quad \forall\, x \in (a, b) \tag{6.3.2}$$

(chiaramente supporremo $\bar{x} \neq x$). Fissiamo allora, per esempio, $x \in (\bar{x}, b)$ e applichiamo il teorema di Lagrange alla restrizione di f all'intervallo $[\bar{x}, x]$. È chiaro che tale restrizione soddisfa tutte le ipotesi del Teorema 6.2.1: in quanto restrizione di una funzione derivabile su (a, b), essa è derivabile (e quindi in particolare continua) su $[\bar{x}.x]$. Troviamo quindi $c \in (\bar{x}, x)$ tale che

$$\frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} = f'(c) = 0\,,$$

grazie alla (6.3.1). Quindi $f(x) - f(\bar{x}) = 0$. Essendo x arbitrario in $(\bar{x}, b)$, concludiamo che $f(x) = f(\bar{x})$ per ogni $x \in (\bar{x}, b)$. Ragionando allo stesso modo per ogni $x \in (a, \bar{x})$, concludiamo dunque la (6.3.2). □

6.3.2 Monotonia e segno della derivata

Definizione 6.3.3. *Sia* $f : I \to \mathbb{R}$. *Diciamo che:*

1. f *è* monotona non decrescente *su* I *se:*

$$\forall\, x_1,\, x_2 \in I \qquad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2)\,; \tag{6.3.3}$$

2. f *è* monotona strettamente crescente *su* I *se:*

$$\forall\, x_1,\, x_2 \in I \qquad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)\,; \tag{6.3.4}$$

3. f *è* monotona non crescente *su* I *se:*

$$\forall\, x_1,\, x_2 \in I \qquad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \geq f(x_2)\,; \tag{6.3.5}$$

4. f *è* monotona strettamente decrescente *su* I *se:*

$$\forall\, x_1,\, x_2 \in I \qquad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2)\,. \tag{6.3.6}$$

Osservazione 6.3.4.

- Si noti che ciascuna delle proprietà di monotonia introdotte ha *carattere globale*, in quanto le (6.3.3)–(6.3.6) devono valere per *ogni coppia di punti* x_1, $x_2 \in I$.

- È facile vedere che se $f : I \to \mathbb{R}$ è *strettamente monotona* (cioè strettamente crescente o strettamente decrescente), allora f è iniettiva, quindi invertibile, su I.
- Chiaramente le proprietà di stretta monotonia implicano le proprietà di larga monotonia: una funzione strettamente crescente (risp., decrescente) è anche non decrescente (risp., non crescente). Non vale ovviamente il viceversa, si veda l'Esempio 6.3.6.

Esempio 6.3.5 (Monotonia di **alcune** funzioni elementari)**.**

- Consideriamo le funzioni potenza a esponente naturale $f(x) = x^k$, con $k \in \mathbb{N}$, di dominio $D_f = \mathbb{R}$. Allora:
  - se $k = 0$, si ha $f(x) = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Ogni funzione costante è sia monotona non decrescente, sia monotona non crescente[4];
  - se $k > 0$ e pari, f non ha alcun tipo di monotonia su $\mathbb{R}$, ma la restrizione di f a $(-\infty, 0)$ è strettamente decrescente, mentre la restrizione di f a $(0, +\infty)$ è strettamente crescente;
  - se $k > 0$ e dispari, f è strettamente crescente.
- Le funzioni sin e cos non hanno alcun tipo di monotonia su $\mathbb{R}$, ma possiedono infinite restrizioni monotone. Per esempio, la funzione sin è strettamente crescente su tutti gli intervalli $(-\pi/2 + 2m\pi, \pi/2 + 2m\pi)$, al variare di $m \in Z$, ed è strettamente decrescente su tutti gli intervalli $(\pi/2 + 2m\pi, 3\pi/2 + 2m\pi)$, al variare di $m \in Z$.
- La funzione tan non ha alcun tipo di monotonia su $\mathbb{R}$, ma possiede infinite restrizioni monotone. In effetti, la funzione tan è strettamente crescente su tutti gli intervalli $(-\pi/2 + m\pi, \pi/2 + m\pi)$, al variare di $m \in Z$.
- Per ogni $a > 1$ la funzione esponenziale $x \in \mathbb{R} \mapsto a^x$ è strettamente crescente su $\mathbb{R}$; per ogni $a \in (0, 1)$ la funzione esponenziale $x \in \mathbb{R} \mapsto a^x$ è strettamente decrescente su $\mathbb{R}$.
- Per ogni $a > 1$ la funzione logaritmica $x \in (0, +\infty) \mapsto \log_a(x)$ è strettamente crescente su $(0, +\infty)$; per ogni $a \in (0, 1)$ la funzione logaritmica $x \in (0, +\infty) \mapsto \log_a(x)$ è strettamente decrescente su $(0, +\infty)$.

Esempio 6.3.6. La funzione

$$f(x) := \begin{cases} 0 & x < 0\,, \\ x & x \in [0, 1]\,, \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

è non decrescente su $\mathbb{R}$. Si osservi che f non è strettamente crescente su $\mathbb{R}$ La funzione $g(x) := -f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ è non crescente (ma non strettamente decrescente) su $\mathbb{R}$.

Il seguente risultato mette in relazione le proprietà di monotonia di una funzione derivabile con il segno della sua derivata.

Teorema 6.3.7. *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Allora:*

1. *f è monotona non decrescente su (a, b) <u>se e solo se</u> $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a, b)$;*
2. *f è monotona non crescente su (a, b) <u>se e solo se</u> $f'(x) \leq 0$ per ogni $x \in (a, b)$;*
3. *<u>se</u> $f'(x) > 0$ per ogni $x \in (a, b)$, <u>allora</u> f è strettamente crescente su (a, b);*

[4] Le funzioni costanti sono le uniche funzioni ad avere entrambe le proprietà.

4. <u>*se*</u> $f'(x) < 0$ *per ogni* $x \in (a,b)$, <u>*allora*</u> f *è strettamente decrescente su* (a,b).

Osservazione 6.3.8. Osserviamo che nei punti 3. e 4. non vale una doppia implicazione (si veda anche l'Osservazione 6.3.10): per esempio, la funzione $f(x) = x^3$, con $D_f = \mathbb{R}$, è strettamente crescente su $\mathbb{R}$, ma è falso che $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$: infatti, $f'(0) = 0$. Rimane però vero che $f'(x) = 3x^2 \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Osservazione 6.3.9. Si noti che il Teorema 6.3.7 è solo vero sugli intervalli: per esempio, la funzione

$$\tan \quad \text{verifica} \quad \tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} > 0 \qquad \forall\, x \in \mathrm{dom}(\tan) = \mathbb{R} \setminus \{k\frac{\pi}{2},\, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Però tan non è strettamente crescente su dom(tan), anzi sul suo dominio non gode di alcuna proprietà di monotonia. È però vero che, per ogni $k \in \mathbb{Z}$, la restrizione di tan a ogni <u>intervallo</u> $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ è strettamente crescente.

Dimostrazione. Dimostriamo il punto 1. (la dimostrazione del punto 2. si sviluppa in modo analogo). Supponiamo che f sia non decrescente su (a,b): allora

$$\forall\, x_0 \in (a,b) \qquad \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0\,, \tag{6.3.7}$$

in quanto il rapporto incrementale ha segno positivo e il limite per $x \to x_0^+$ preserva il segno. Siccome f è derivabile in x_0, si ha che $f'(x_0) = f'_+(x_0) \geq 0$. Essendo x_0 arbitrario, concludiamo che la funzione derivata assume valori non negativi. Viceversa, dimostriamo che vale la (6.3.3). Fissiamo dunque x_1, $x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$ e applichiamo il Teorema di Lagrange alla restrizione di f all'intervallo $[x_1, x_2]$ (è facile vedere che tutte le ipotesi sono verificate). Concludiamo dunque che esiste $c \in (x_1, x_2)$ tale che

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\,.$$

Essendo $f'(c) \geq 0$ (poiché per ipotesi f' assume valori non negativi), ed essendo $x_2 > x_1$, concludiamo che, necessariamente, $f(x_2) \geq f(x_1)$.

Sviluppando proprio quest'ultimo argomento, si dimostra anche il punto 3. In effetti, fissiamo ancora x_1, $x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$ e applichiamo il Teorema di Lagrange alla restrizione di f all'intervallo $[x_1, x_2]$. Otteniamo che esiste $c \in (x_1, x_2)$ tale che

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\,.$$

Essendo $f'(c) > 0$ per ipotesi, ed essendo $x_2 > x_1$, concludiamo che $f(x_2) > f(x_1)$. Si ragiona analogamente per il punto 4. □

Osservazione 6.3.10. In ultima analisi, la ragione per la quale non vale la doppia implicazione nel punto 3., e cioè stretta crescenza NON implica stretta positività della derivata, è la seguente: per ogni $x_0 \in (a,b)$, pur essendo il rapporto incrementale

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \quad \forall\, x \in (x_0, b),$$

non si può concludere da questo la stretta positività di $f'_+(x_0)$, in quanto il passaggio al limite non preserva le disuguaglianze strette. Identiche considerazioni valgono in relazione al punto 4.

6.3.3 Applicazione allo studio dei punti di estremo relativo

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Ricordiamo che il Teorema di Fermat comporta che i punti "candidati" a essere di estremo relativo ricadono, tutti e soli, in queste tre categorie:

1. gli estremi a, b dell'intervallo di definizione;

2. i punti interni $x \in (a, b)$ tali che $\nexists\, f'(x)$;

3. i punti interni $x \in (a, b)$ tali che esiste $f'(x) = 0$.

Il seguente risultato fornisce condizioni sufficienti affinché un assegnato punto $x_0 \in (a, b)$, punto critico per f oppure in cui non esiste la derivata f', sia di estremo relativo per f (di fatto, assoluto): sostanzialmente, per stabilire la natura di x_0 è sufficiente studiare il segno di f' (cioè la monotonia di f) nell'intorno di x_0.

Teorema 6.3.11. *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione <u>continua</u>. Sia $x_0 \in (a, b)$ un punto stazionario (o critico) per f (cioè $f'(x_0) = 0$), oppure tale che $\nexists\, f'(x_0)$. Si ha che*

1. *se f è derivabile sugli intervalli (a, x_0) e (x_0, b) e verifica*
$$f'(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in (a, x_0) \quad e \quad f'(x) \leq 0 \quad \forall\, x \in (x_0, b)\,, \tag{6.3.8}$$
allora x_0 è un punto di massimo relativo per f su (a, b);

2. *se f è derivabile sugli intervalli (a, x_0) e (x_0, b) e verifica*
$$f'(x) \leq 0 \quad \forall\, x \in (a, x_0) \quad e \quad f'(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in (x_0, b)\,, \tag{6.3.9}$$
allora x_0 è un punto di minimo relativo per f su (a, b).

Dimostrazione. Dimostriamo per esempio che, se vale la (6.3.8), il punto x_0 è di massimo relativo per f. Fissiamo quindi $x \in (a, x_0)$ e applichiamo il Teorema di Lagrange alla restrizione di f all'intervallo $[x, x_0]$[5]. Allora concludiamo che esiste $c \in (x, x_0)$ tale che

$$\frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} = f'(c) \geq 0\,,$$

grazie alla (6.3.8). Essendo $x < x_0$, concludiamo che il numeratore deve essere $f(x_0) - f(x) \geq 0$, da cui $f(x) \leq f(x_0)$. Essendo x arbitrario, abbiamo che

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall\, x \in (a, x_0)\,.$$

Ragionando in modo analogo, dimostriamo anche che

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall\, x \in (x_0, b)\,,$$

da cui la tesi. □

[5]Si noti che la restrizione di f a $[x, x_0]$ è continua -questo è garantito proprio dall'ipotesi che f sia continua su tutto l'intervallo (a, b)- e derivabile su (x, x_0), quindi sono soddisfatte le ipotesi del Teorema di Lagrange.

Esempio 6.3.12. Verifichiamo che la funzione $W : [-2,2] \to \mathbb{R}$

$$W(x) = \frac{(x^2-1)^2}{4} \quad \text{ha due punti di minimo assoluto in } x_1 = -1 \text{ e } x_2 = 1$$
$$\text{e ha un punto di massimo relativo in } x_0 = 0.$$

In effetti, $W'(x) = x^3 - x$ per ogni $x \in [-2,2]$, e si vede subito che

$$W'(x) \begin{cases} > 0 & \text{se } x \in (-1,0) \text{ o se } x \in (1,2), \\ = 0 & \text{se } x = -1, \text{ o } x = 0, \text{ o } x = 1, \\ < 0 & \text{se } x \in (-2,-1) \text{ o se } x \in (0,1). \end{cases}$$

Applicando i Teoremi 6.3.7 e 6.3.11, concludiamo che W è strettamente decrescente su $(-\infty,-1)$ e strettamente crescente su $(-1,0)$, pertanto il punto stazionario $x_1 = -1$ è di minimo relativo (discorsi identici si fanno per $x_2 = 1$). Analogamente, essendo W strettamente crescente su $(-1,0)$ e strettamente decrescente su $(0,1)$, deduciamo che $x_0 = 0$ è un punto di massimo relativo. Poichè $W(x_1) = W(x_2) = 0$ e $W(x) \geq 0$ per ogni $x \in [-2,2]$, x_1 e x_2 sono di fatto punti di minimo assoluto.

Esempio 6.3.13. Osserviamo che non si può rinunciare all'ipotesi che f sia continua sull'intervallo (a,b), come dimostra il seguente esempio: la funzione

$$f : (-1,1) \to \mathbb{R} \quad f(x) := \begin{cases} -x^2 & x \in (-1,0)\,, \\ -\frac{1}{2} & x = 0\,, \\ -x^2 - 1 & x \in (0,1) \end{cases}$$

è continua e derivabile su $(-1,1) \setminus \{0\}$, e verifica $f'(x) = -2x$ per ogni $x \in (-1,1) \setminus \{0\}$, cosicché

$$f'(x) > 0 \ \ \forall\, x \in (-1,0), \qquad f'(x) < 0 \ \ \forall\, x \in (0,1).$$

Si vede subito, però, che il punto $x_0 = 0$ non è di estremo relativo per f.

6.4 Convessità, concavità, e derivate seconde

6.4.1 Convessità e concavità

Definizione 6.4.1. *Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione continua.*

1. *Diciamo che f è* convessa *su (a,b) se per ogni coppia di punti $x_1, x_2 \in (a,b)$ con $x_1 < x_2$, il segmento congiungente i corrispondenti punti sul grafico $P_1 = (x_1, f(x_1))$ e $P_2 = (x_2, f(x_2))$ non sta al di sotto del grafico di f, per $x \in [x_1, x_2]$.*

2. *Diciamo che f è* concava *su (a,b) se per ogni coppia di punti $x_1, x_2 \in (a,b)$ con $x_1 < x_2$, il segmento congiungente i corrispondenti punti sul grafico $P_1 = (x_1, f(x_1))$ e $P_2 = (x_2, f(x_2))$ non sta al di sopra del grafico di f, per $x \in [x_1, x_2]$.*

Esempio 6.4.2 (Convessità e concavità di **alcune** funzioni elementari)**.**

1. La funzione $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, è convessa su $\mathbb{R}$ (della stessa proprietà godono tutte le funzioni potenza a esponente pari);

2. La funzione $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$, è convessa su $[0, +\infty)$ e concava su $(-\infty, 0]$ (questo è anche l'andamento di tutte le funzioni potenza con esponente dispari maggiore o uguale a 3);
3. la funzione $f(x) = x^{1/2}$, $x \in [0, +\infty)$, è concava su $[0, +\infty)$;
4. la funzione $f(x) = x$ è sia convessa sia concava su $\mathbb{R}$ (le funzioni lineari sono le uniche funzioni sia convesse sia concave);
5. per ogni $a > 0$ la funzione esponenziale $x \mapsto a^x$, $x \in \mathbb{R}$, è convessa su $\mathbb{R}$;
6. per ogni $a > 0$ con $a \neq 1$ la funzione logaritmica $x \mapsto \log_a(x)$, $x \in (0, +\infty)$, è concava su $(0, +\infty)$.

Il risultato alla base del "metodo differenziale" per lo studio della convessità/concavità è il seguente teorema, di cui non diamo la dimostrazione.

Teorema 6.4.3. *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Si ha che*

1. *f è convessa su (a, b) se e solo se la funzione derivata $f' : (a, b) \to \mathbb{R}$ è non decrescente;*
2. *f è concava su (a, b) se e solo se la funzione derivata $f' : (a, b) \to \mathbb{R}$ è non crescente.*

Quindi lo studio della convessità/concavità di una funzione derivabile f viene ricondotto allo studio della monotonia della sua funzione derivata f'. Ora, se la funzione f' è a sua volta derivabile, in virtù del Teorema 6.3.7 la monotonia di f' dipende dal segno della derivata di f'. Combinando queste informazioni, si conclude che lo studio del segno della derivata di f' determina gli intervalli di convessità/concavità di f. Per enunciare questo criterio, introduciamo in modo sistematico la derivata della funzione derivata: parleremo di derivata prima per f', e di derivata seconda per la derivata di f'.

Derivate seconde.

Definizione 6.4.4. *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile su (a, b), cosicché è ben definita la funzione derivata $f' : (a, b) \to \mathbb{R}$.*

1. *Sia $x_0 \in (a, b)$. Chiamiamo* derivata seconda *di f in x_0 la derivata, se esiste, di f' in x_0, e la indichiamo con il simbolo $f''(x_0)$.*
2. *Diciamo che f è* derivabile due volte *in x_0 se f' è derivabile in x_0, cioè se la derivata seconda $f''(x_0)$ esiste finita.*
3. *Diciamo che f è* derivabile due volte in (a, b) *se f' è derivabile in (a, b). In questo modo, resta definita la funzione derivata seconda $f'' : (a, b) \to \mathbb{R}$.*

Esempio 6.4.5.

1. La funzione
$$f(x) = x^2 + 4x - 2 + \cos(x) + 3\ln(x), \qquad x \in (0, +\infty),$$
è derivabile due volte su $(0, +\infty)$. Infatti, f è derivabile una volta su $\mathbb{R}$, con $f'(x) = 2x + 4 - \sin(x) + \frac{3}{x}$ per ogni $x \in (0, +\infty)$. A sua volta, f' è derivabile su $(0, +\infty)$, con $f''(x) = 2 - \cos(x) - \frac{3}{x^2}$ per ogni $x \in (0, +\infty)$.
2. La funzione $f(x) = e^x$ è derivabile due volte su $\mathbb{R}$, con $f''(x) = f'(x) = e^x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

3. La funzione
$$f(x) = x|x| = \begin{cases} x^2 & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ -x^2 & \text{se } x < 0, \end{cases}$$
è derivabile su $\mathbb{R}$. Infatti, essa è derivabile su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, e verifichiamo la derivabiltà di f in $x_0 = 0$ con la definizione
$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h|h|}{h} = 0\,.$$
Allora f' è data da
$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ -2x & \text{se } x < 0, \end{cases} \qquad \text{cioè} \qquad f'(x) = 2|x|\,.$$
Siccome f' è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, concludiamo che f è derivabile due volte su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, con
$$f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ -2 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Criterio per convessità/concavità. Possiamo ora formalizzare i legami fra segno della derivata seconda e convessità/concavità.

Teorema 6.4.6. *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione* <u>*derivabile due volte*</u>*. Si ha che*

1. *f è convessa su (a, b) se e solo se la funzione derivata seconda f'' è non negativa su (a, b), cioè $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a, b)$;*

2. *f è concava su (a, b) se e solo se la funzione derivata seconda f'' è non positiva su (a, b), cioè $f''(x) \leq 0$ per ogni $x \in (a, b)$;.*

Osservazione 6.4.7. Si osservi che, come il Teorema 6.3.7, anche il Teorema 6.4.6 vale solo su intervalli: per esempio, la funzione $f(x) = x^{2/3}$, derivabile su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, verifica $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3}$ e $f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-4/3} < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Si noti però che f non è globalmente concava su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (che non è un intervallo!): le restrizioni di f agli intervalli $(0, +\infty)$ e a $(-\infty, 0)$ sono però concave.

Punti di flesso. Infine, diamo la seguente

Definizione 6.4.8. *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in (a, b)$ un punto di continuità per f. Supponiamo che $\exists\, f'(x_0) \in [-\infty, +\infty]$ (cioè esista la derivata di f in x_0, finita oppure no). Diciamo che il punto corrispondente sul grafico $(x_0, f(x_0))$ è* un punto di flesso *se f ha concavità opposta a destra e a sinistra di x_0, cioè se il punto $(x_0, f(x_0))$ separa una regione di convessità da una regione di concavità.*

Esempio 6.4.9. 1. La funzione $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$, ha in $(0, 0)$ un <u>punto di flesso a tangente orizzontale</u> (in quanto $f'(0) = 0$: la retta tangente in $(0, 0)$ è l'asse delle x).

2. La funzione $f(x) = x^{1/3}$, $x \in \mathbb{R}$, ha in $(0,0)$ un punto di flesso a tangente verticale (in quanto $f'(0) = +\infty$).

3. La funzione $f(x) = \arctan(x)$, $x \in \mathbb{R}$, ha in $(0,0)$ un punto di flesso a tangente obliqua (in quanto $f'(0) = 1$: la retta tangente in $(0,0)$ è la retta $y = x$).

4. Si noti che il punto $(0,0)$ NON è di flesso per la funzione

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{se } x < 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ -x^{1/3} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

   In effetti, $(0,0)$ separa una regione di convessità da una regione di concavità, ma $\nexists\, f'(0)$.

Concludiamo con la seguente condizione necessaria (ma non sufficiente) perché un dato punto sia di flesso.

Proposizione 6.4.10. *Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile e sia $x_0 \in (a,b)$ tale che il punto $(x_0, f(x_0))$ è di flesso. Se $f''(x_0)$ esiste, allora $f''(x_0) = 0$.*

L'annullamento della derivata seconda è solo una condizione necessaria e non sufficiente per avere un punto di flesso. Per esempio, la funzione $f(x) = x^4$ ha derivata seconda nulla in $x_0 = 0$, ma il punto $(0,0)$ non è di flesso, in quanto f è convessa su $\mathbb{R}$.

6.5 Schema per lo studio di funzione

Data $f(x)$

1. determinare il dominio D_f
2. stabilire se f è pari?/ f è dispari?
   (Ha senso solo se D_f è simmetrico rispetto a 0!!)
3. segno di f:
   - regioni dove $f > 0$
   - regioni dove $f < 0$
   - punti dove $f = 0 \Rightarrow$ intersezioni di graf(f) con asse x

   N.B. l'unica intersezione di graf(f) con asse y è nel punto $(0, f(0))$ (se $0 \in D_f$)
4. limiti di f "agli estremi" di D_f, per esempio:
   - se $D_f = (a, +\infty)$ calcolo
   $$\lim_{x\to a^+} f(x) \ \& \ \lim_{x\to+\infty} f(x)$$
   - se $D_f = \mathbb{R} \setminus \{a, b\}$ con $a < b$ calcolo
   $$\lim_{x\to-\infty} f(x), \ \lim_{x\to a^-} f(x), \ \lim_{x\to a^+} f(x),$$
   $$\lim_{x\to b^-} f(x), \ \lim_{x\to b^+} f(x), \ \lim_{x\to+\infty} f(x)$$
5. asintoti verticali, orizzontali, obliqui per graf(f)
6. continuità di f & classificazione eventuali punti di discontinuità
7. derivabilità di f & classificazione eventuali punti di non derivabilità
8. segno di f':
   - regioni dove $f' > 0 \Rightarrow$ f strett. crescente
   - regioni dove $f' < 0 \Rightarrow$ f strett. decrescente
   - punti dove $f' = 0 \Rightarrow$ punti stazionari
9. classificazione (max. rel./min. rel./né max. né min.) dei punti stazionari, studiando segno di f'
10. classificazione (max. rel./min. rel./né max. né min.) dei punti interni a D_f dove f non è derivabile, studiando segno di f'
11. classificazione (max. rel./min. rel./né max. né min.) degli eventuali estremi di D_f
12. segno di f'':
    - regioni dove $f'' \geq 0 \Rightarrow$ f convessa
    - regioni dove $f'' \leq 0 \Rightarrow$ f concava
13. punti di sella
14. tracciare il grafico qualitativo di f

Capitolo 7

Integrali indefiniti e definiti

7.1 La nozione di primitiva

Ci occuperemo del seguente

Problema 7.1.1. Data una funzione $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, trovare una funzione $F : (a, b) \to \mathbb{R}$, derivabile, tale che

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall\, x \in (a, b)\,. \tag{7.1.1}$$

Definizione 7.1.2. *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Chiamiamo* primitiva *di f su (a, b) ogni funzione $F : (a, b) \to \mathbb{R}$, derivabile, verificante la* (7.1.1).

Esempio 7.1.3. 1. Sia $f(x) \equiv 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Allora la funzione $F_0(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, è una primitiva per f. Ma anche la funzione $F_1(x) = x + 1$, $x \in \mathbb{R}$, è una primitiva per f.

2. Sia $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$. Una primitiva di f è la funzione $F(x) = \frac{x^2}{2}$, $x \in \mathbb{R}$.
3. Sia $f(x) = \cos(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Una primitiva di f è la funzione $F(x) = \sin(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
4. Sia $f(x) = \sin(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Una primitiva di f è la funzione $F(x) = -\cos(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Osservazione 7.1.4. Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Possiamo osservare che

- se f ammette una primitiva F su (a, b), allora f ammette di fatto infinite primitive su (a, b), in quanto per ogni costante reale c si ha che la funzione $x \in (a, b) \mapsto F(x) + c$ è anch'essa una primitiva di f. Infatti,

$$(F + c)'(x) = F'(x) = f(x) \qquad \forall\, x \in (a, b)\,;$$

- se F e G sono due primitive di f su (a, b), allora esiste una costante $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$G(x) = F(x) + c \qquad \forall\, x \in (a, b)\,.$$

  Questo segue dal Teorema della derivata nulla (cf. con il Teorema 5.5.5.): in effetti, la funzione $G - F$ ha derivata nulla (in quanto $(G - F)'(x) = f(x) - f(x) \equiv 0$ per ogni $x \in (a, b)$) ed è definita su **un intervallo** (a, b).

Diamo ora la seguente

Definizione 7.1.5 (Integrale indefinito)**.** *Data una funzione $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, chiamiamo* integrale indefinito *di f (su (a,b)) l'insieme di tutte le primitive di f (su (a,b)), ammesso che ne esistano. Denotiamo l'integrale indefinito di f con il simbolo*

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{7.1.2}$$

Osserviamo che l'integrale indefinito non è un numero, ma un <u>insieme di funzioni</u>.
In virtù del punto 1. dell'Osservazione 7.1.4, si ha che, se una funzione $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ ammette una primitiva F su (a,b), allora di fatto ne ammette infinite, che differiscono per una costante reale. D'altra parte, il punto 2. afferma che in questo modo si ottengono <u>tutte e sole</u> le primitive di f. Riassumiamo questo nel

Teorema 7.1.6 (Teorema di struttura dell'integrale indefinito.)**.** *Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ e supponiamo che essa ammetta una primitiva F. Allora l'integrale indefinito di f è dato da*

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \{F+c\,:\; c\in\mathbb{R}\}\,. \tag{7.1.3}$$

Sintetizzeremo la formula (7.1.3) scrivendo

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)+c\,,$$

ove si intende che la constante c varia arbitrariamente in $\mathbb{R}$. Per esempio, tenendo conto che una primitiva della funzione $f(x)=x^2$ è la funzione $F(x)=\frac{x^3}{3}$, scriveremo

$$\int x^2\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}+c\,.$$

Esistenza di primitive. Abbiamo il seguente

Teorema 7.1.7. *Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$. Se*

$$f \text{ è continua su } (a,b), \tag{7.1.4}$$

allora f ammette almeno una primitiva (di fatto, ne ammette infinite) su (a,b).

Osservazione 7.1.8. Non possiamo rinunciare all'ipotesi di continuità: per esempio, la funzione di Heaviside

$$H(x)=\begin{cases}1 & \text{se } x\geq 0,\\ 0 & \text{se } x<0,\end{cases}$$

non ammette alcuna primitiva su $\mathbb{R}$. In effetti, se per assurdo esistesse una funzione $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, derivabile su tutto $\mathbb{R}$ e con derivata $F'(x)=H(x)$, F dovrebbe essere: costante su $(-\infty,0)$ (perché su $(-\infty,0)$ la derivata dovrebbe essere nulla) e con un andamento lineare su $(0,+\infty)$ (perché su $(0,+\infty)$ la derivata dovrebbe essere costantemente uguale a 1). Imponendo che $F(0)=0$ (questo non è limitativo: il ragionamento che sviluppiamo è valido per qualsiasi valore di F in 0) e che F sia continua in 0 (questa è una richiesta naturale, visto che F deve essere anche derivabile in 0), otteniamo che

$$F(x) = \begin{cases} x & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ 0 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Ma la funzione F così costruita NON è derivabile in 0. Quindi F non può essere una primitiva per H su $\mathbb{R}$.

7.1.1 Gli integrali definiti e la loro interpretazione geometrica

Definizione 7.1.9. *Siano*

♣ $[a, b]$ *un intervallo chiuso e limitato*

♣ $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una funzione continua (quindi f ammette infinite primitive su $[a, b]$).*

Chiamiamo integrale definito *di f su $[a, b]$ (e lo denotiamo con il simbolo $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$) il numero*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a), \tag{7.1.5}$$

dove F è una qualsiasi primitiva di f.

Osservazione 7.1.10. 1. Si noti che l'integrale DEFINITO è un numero!

2. Si osservi che la Definizione 7.1.9 è ben posta, cioè NON dipende dalla scelta della primitiva di f. Cioè, cambiando la primitiva di f, si ottiene sempre lo stesso numero! Infatti,
   - sia $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ una qualsiasi altra primitiva di f;
   - per il teorema di struttura, F e G differiscono per una costante, cioè
   $$\exists\, k \in \mathbb{R} : \ G(x) = F(x) + k \quad \forall\, x \in [a, b].$$
   - Allora
   $$G(b) - G(a) = F(b) + k - (F(a) + k) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

3. D'ora in poi useremo la notazione più sintetica
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b$$

Significato geometrico dell'integrale definito. Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è una funzione continua e positiva, cioè

$$f(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in [a, b],$$

allora

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ \text{ è l'area della regione piana compresa fra } \mathrm{graf}(f) \text{ e l'asse } x$$

Integrali definiti e parità/disparità. Sia $[-M, M]$ un intervallo simmetrico rispetto all'origine e sia $f : [-M, M] \to R$ una funzione continua (quindi possiamo considerarne l'integrale definito). Allora

$$f \text{ dispari su } [-M, M] \ \Rightarrow \ \int_{-M}^{M} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$
$$f \text{ pari su } [-M, M] \ \Rightarrow \ \int_{-M}^{M} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{M} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

7.1.2 Integrali indefiniti elementari

Diamo ora gli integrali indefiniti[1] di **alcune** funzioni elementari.

$$\forall\, r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \qquad \int x^r \,\mathrm{d}x = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c\,, \tag{7.1.6a}$$

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(|x|) + c\,, \tag{7.1.6b}$$

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \qquad \int \sin(\alpha x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\alpha}\cos(\alpha x) + c\,, \tag{7.1.6c}$$

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \qquad \int \cos(\alpha x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}\sin(\alpha x) + c\,, \tag{7.1.6d}$$

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \qquad \int \frac{1}{\cos^2(\alpha x)}\,\mathrm{d}x = \int \left(1 + \tan^2(\alpha x)\right)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}\tan(\alpha x) + c\,, \tag{7.1.6e}$$

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \qquad \int e^{\alpha x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha x} + c\,, \tag{7.1.6f}$$

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \qquad \int \frac{1}{1+\alpha^2 x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}\arctan(\alpha x) + c\,. \tag{7.1.6g}$$

Un fondamentale strumento per il calcolo degli integrali indefiniti è il seguente

Teorema 7.1.11 (Linearità degli integrali indefiniti)**.** *Date due funzioni $f\,, g : (a, b) \to \mathbb{R}$, siano $F : (a, b) \to \mathbb{R}$ una primitiva di f in (a, b) e $G : (a, b) \to \mathbb{R}$ una primitiva di g in (a, b). Allora, per ogni coppia di costanti α, $\beta \in \mathbb{R}$, la funzione $\alpha F + \beta G$ è una primitiva della funzione $\alpha f + \beta g$. Si ha pertanto*

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha F(x) + \beta G(x) + c\,. \tag{7.1.7}$$

Combinando il Teorema 7.1.11 con le formule (7.1.6), siamo in grado di calcolare gli integrali indefiniti delle combinazioni lineari delle funzioni elementari summenzionate.
Osservazione generale importante: per verificare il risultato del calcolo di un integrale indefinito, è sufficiente

derivare la primitiva ottenuta e verificare
che in questo modo si ritrova la funzione di partenza

[1]di verifica immediata!!

Esempio 7.1.12. 1. Si ha che

$$\int\left(2x^{4/3}-\frac{4}{1+3x^2}+\sin(5x)\right)\,\mathrm{d}x = 2\int x^{4/3}\,\mathrm{d}x-4\int\frac{1}{1+3x^2}\,\mathrm{d}x+\int\sin(5x)\,\mathrm{d}x$$
$$=\frac{6}{7}x^{7/3}-\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan(\sqrt{3}x)-\frac{1}{5}\cos(5x)+c\,.$$

2. Si ha che

$$\int\left(\frac{3}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}-\frac{1}{3x}+4e^{-x}\right)\,\mathrm{d}x = 3\int\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\,\mathrm{d}x-\frac{1}{3}\int\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x+4\int e^{-x}\,\mathrm{d}x$$
$$=6\tan\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{3}\ln(|x|)-4e^{-x}+c\,.$$

Osserviamo che il calcolo di un integrale indefinito da' come risultato un insieme di (infinite) funzioni. Per selezionare una sola fra tutte le primitive di una assegnata funzione f, è sufficiente imporre che, in un dato punto x_0, la primitiva assuma un assegnato valore y_0.

Esempio 7.1.13. 1. Calcolare la primitiva (**l'unica!**) $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ della funzione $f(x)=x^5+\frac{1}{x^2+4}$, $x\in\mathbb{R}$, verificante $F(0)=3$.
Calcoliamo l'integrale indefinito di f, osservando che

$$\int\frac{1}{x^2+4}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int\frac{1}{1+\frac{x^2}{4}}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int\frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+c$$

(si noti che abbiamo raccolto un 4 al denominatore per riscrivere la funzione $\frac{1}{x^2+4}$ in una formula più simile a $\frac{1}{1+x^2}$). Allora

$$\int\left(x^5+\frac{1}{x^2+4}\right)\,\mathrm{d}x=\frac{x^6}{6}+\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+c\,.$$

Ora ricerchiamo fra tutte le primitive di f l'unica verificante $F(0)=3$: dobbiamo determinare la costante c imponendo

$$3=F(0)=0+\frac{1}{2}\arctan(0)+c,$$

da cui $c=3$. Quindi

$$F(x)=\frac{x^6}{6}+\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+3\qquad\forall\,x\in\mathbb{R}\,.$$

2. Calcolare la primitiva (**l'unica!**) $G:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ della funzione $f(x)=\frac{x+2}{x^{5/2}}$, $x\in(0,+\infty)$, tale che il grafico graf(G) passi per il punto $(4,2)$. Calcolare inoltre l'area della regione compresa fra graf(f) e l'asse delle x, sull'intervallo $[1,2]$.
Calcoliamo l'integrale indefinito di f:

$$\int\left(\frac{x+2}{x^{5/2}}\right)\,\mathrm{d}x=\int\left(\frac{x}{x^{5/2}}+\frac{2}{x^{5/2}}\right)\,\mathrm{d}x=\int x^{-3/2}\,\mathrm{d}x+2\int x^{-5/2}\,\mathrm{d}x=-2x^{-1/2}-\frac{4}{3}x^{-3/2}+c\,.$$

Quindi l'area della regione compresa fra graf(f) e l'asse delle x, sull'intervallo $[1,2]$, è

$$\mathcal{A} = \int_1^2 \frac{x+2}{x^{5/2}}\,\mathrm{d}x = \left[-2x^{-1/2} - \frac{4}{3}x^{-3/2}\right]_1^2 = -2\cdot 2^{-1/2} - \frac{4}{3}2^{-3/2} - \left(-2-\frac{4}{3}\right)$$
$$= 2\left(1-\sqrt{2}\right) + \frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{\sqrt{8}}\right).$$

La condizione che graf(G) passi per il punto $(4,2)$ ovviamente equivale a imporre che $G(4)=2$, quindi determiniamo c:

$$2 = G(4) = -24^{-1/2} - \frac{4}{3}4^{-3/2} + c = -1 - \frac{4}{3}\frac{1}{8} = -\frac{7}{6}\,.$$

Quindi

$$G(x) = -2x^{-1/2} - \frac{4}{3}x^{-3/2} + \frac{19}{6} \qquad \forall\, x \in (0,+\infty)\,.$$

3. Determinare la funzione $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la cui derivata è f, il cui grafico passa per $(0,0)$;
   - scrivere l'equazione della retta tangente a graf(F) in $(0,0)$;
   - calcolare la derivata seconda di F.

$\diamondsuit$ Calcoliamo l'integrale indefinito di f:

$$\int \left(\sin\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{1}{4}e^{2x}\right)\mathrm{d}x = \int \sin\left(\frac{x}{3}\right)\mathrm{d}x + \frac{1}{4}\int e^{2x}\,\mathrm{d}x = -3\cos\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{1}{8}e^{2x} + c\,.$$

La condizione che

graf(F) passi per il punto $(0,0)$ equivale a $F(0)=0$

quindi

$$0 = F(0) = -3\cos(0) + \frac{1}{8}e^0 + c \;\Rightarrow\; c = 3 - \frac{1}{8} = \frac{23}{8}$$

da cui

$$F(x) = -3\cos\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{1}{8}e^{2x} + \frac{23}{8} \quad \forall\, x\in\mathbb{R}.$$

$\diamondsuit$ Chiaramente la derivata di F è f (**verificarlo!**), quindi per la retta tangente in $(0,0)$ serve calcolare

$$F'(0) = f(0) = \sin(0) + \frac{1}{4}e^0 = \frac{1}{4}$$

e quindi la retta tangente a graf(f) in $(0,0)$ è

$$y = \frac{1}{4}x$$

$\diamondsuit$ La derivata seconda di F è la derivata di f', cioè

$$F''(x) = f'(x) = \frac{1}{3}\cos\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{1}{2}e^{2x} \quad \forall\, x\in\mathbb{R}.$$

Generalizzazione della tabella degli integrali indefiniti elementari. Sia $g : I \to \mathbb{R}$. Diamo la seguente estensione della tabella degli integrali indefiniti elementari, che può essere giustificata usando la formula di integrazione per sostituzione:

$$\forall\, r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \qquad \int g(x)^r g'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{g(x)^{r+1}}{r+1} + c\,, \tag{7.1.8a}$$

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x = \ln(|g(x)|) + c\,, \tag{7.1.8b}$$

$$\int \sin(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(g(x)) + c\,, \tag{7.1.8c}$$

$$\int \cos(g(x))\,\mathrm{d}x = \sin(g(x)) + c\,, \tag{7.1.8d}$$

$$\int \frac{g'(x)}{\cos^2(g(x))}\,\mathrm{d}x = \int g'(x)\left(1 + \tan^2(g(x))\right)\,\mathrm{d}x = \tan(g(x)) + c\,, \tag{7.1.8e}$$

$$\int g'(x)e^{g(x)}\,\mathrm{d}x = e^{g(x)} + c\,, \tag{7.1.8f}$$

$$\int \frac{g'(x)}{1 + g(x)^2}\,\mathrm{d}x = \arctan(g(x)) + c\,. \tag{7.1.8g}$$

7.2 Integrazione per parti

Teorema 7.2.1 (Formula di integrazione per parti)**.** *Siano $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili con derivata continua. Allora*

$$\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{7.2.1}$$

Dimostrazione. La formula di Leibniz per il calcolo della derivata della funzione prodotto da'

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(fg)(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \qquad \forall\, x \in (a,b).$$

Calcolando l'integrale indefinito di entrambi i membri e osservando che

$$\int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(fg)(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) + c\,,$$

ottengo

$$\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x + \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) + c\,,$$

da cui la (7.2.1). □

Osservazione 7.2.2.
- La (7.2.1) riconduce il calcolo dell'integrale indefinito $\int f'g$ al calcolo dell'integrale indefinito $\int fg'$ (la derivata è stata "scaricata" dalla f alla g). L'idea è che si dovrebbe passare dall'"integrale difficile" $\int f'g$ all'integrale "più semplice" $\int fg'$.
- Operativamente, si può applicare la formula (7.2.1) al calcolo dell'integrale del prodotto di due funzioni h e k

$$\int h(x)k(x)\,\mathrm{d}x$$

scegliendo in modo opportuno quale, fra h e k, dovrà giocare il ruolo di f', e quale delle due avrà il ruolo di g. Se, per esempio, scegliamo di trattare h come f', denotando con H una (qualsiasi) primitiva di h troviamo che

$$\int h(x)k(x)\,\mathrm{d}x = H(x)k(x) - \int H(x)k'(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Per riportarci all'integrale di destra, abbiamo quindi <u>derivato la k e integrato la h</u>.

- Per applicare in modo efficace la formula di integrazione per parti all'integrale di un prodotto di due funzioni, è quindi di <u>fondamentale</u> importanza scegliere bene quale delle due funzioni derivare e quale integrare. Nei seguenti esempi, illustriamo questa tecnica in alcuni casi.

7.2.1 Miscellanea di integrali per parti

Prodotto di un polinomio per una funzione trigonometrica. *Sia $P:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione <u>polinomiale</u> e sia $\alpha \neq 0$. Consideriamo l'integrale indefinito*

$$\int P(x)\sin(\alpha x)\,\mathrm{d}x.$$

Applichiamo la formula di integrazione per parti con le scelte

$$\begin{cases} f' \leftrightarrow \sin(\alpha x), \\ g \leftrightarrow P(x), \end{cases}$$

*cioè **integriamo la funzione trigonometrica e deriviamo il polinomio**.*
Ad esempio

$$\int x\cos(2x)\,\mathrm{d}x \overset{i.p.}{=} -\int 1\frac{\sin(2x)}{2}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}x\sin(2x) = \frac{1}{4}\cos(2x) + \frac{1}{2}x\sin(2x) + c$$

(il simbolo $\overset{i.p}{=}$ significa che l'uguaglianza è stata ottenuta applicando la formula di integrazione per parti). Il seguente esempio mostra che può essere necessario applicare l'integrazione per parti ripetutamente:

$$\int x^3\sin(x)\,\mathrm{d}x \overset{i.p.}{=} -x^3\cos(x) + 3\int x^2\cos(x)\,\mathrm{d}x$$

Per calcolare l'ultimo integrale, applico la formula (7.2.1):

$$\int x^2\cos(x)\,\mathrm{d}x \overset{i.p.}{=} x^2\sin(x) - 2\int x\sin(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

e infine

$$\int x\sin(x)\,\mathrm{d}x \overset{i.p.}{=} \int \cos(x)\,\mathrm{d}x - x\cos(x) = \sin(x) - x\cos(x) + c\,.$$

Allora concludo

$$\int x^3\sin(x)\,\mathrm{d}x = -x^3\cos(x) + 3x^2\sin(x) - 6\sin(x) + 6x\cos(x) + c\,.$$

Prodotto di un polinomio per una funzione esponenziale. *Sia $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione* <u>*polinomiale*</u> *e sia $\alpha \neq 0$. Consideriamo l'integrale indefinito*

$$\int P(x)e^{\alpha x}\,\mathrm{d}x.$$

Applichiamo la formula di integrazione per parti con le scelte

$$\begin{cases} f' \leftrightarrow e^{\alpha x}, \\ g \leftrightarrow P(x), \end{cases}$$

*cioè **integriamo la funzione esponenziale e deriviamo il polinomio**.*
Ad esempio

$$\int xe^x\,\mathrm{d}x \overset{i.p.}{=} -\int 1e^x\,\mathrm{d}x + xe^x = (x-1)e^x + c\,.$$

Prodotto di un polinomio per una funzione logaritmica. *Sia $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione* <u>*polinomiale*</u> *e sia $\alpha \neq 0$. Consideriamo l'integrale indefinito*

$$\int P(x)\ln(\alpha x)\,\mathrm{d}x.$$

Applichiamo la formula di integrazione per parti con le scelte

$$\begin{cases} f' \leftrightarrow P(x), \\ g \leftrightarrow \ln(\alpha x), \end{cases}$$

*cioè **integriamo il polinomio e deriviamo la funzione logaritmica**.*
Ad esempio

$$\int x\ln(2x)\,\mathrm{d}x \overset{i.p.}{=} -\int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}x^2\ln(2x) = -\frac{1}{2}\int x\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}x^2\ln(2x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2\ln(2x) + c\,.$$

Troviamo quindi che

$$\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int 1\ln(x)\,\mathrm{d}x \overset{i.p.}{=} -\int x\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + x\ln(x) = -x + x\ln(x) + c\,.$$

Prodotto di un polinomio per l'arcotangente. *Sia $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione* <u>*polinomiale*</u> *e sia $\alpha \neq 0$. Consideriamo l'integrale indefinito*

$$\int P(x)\arctan(\alpha x)\,\mathrm{d}x.$$

Applichiamo la formula di integrazione per parti con le scelte

$$\begin{cases} f' \leftrightarrow P(x), \\ g \leftrightarrow \arctan(\alpha x), \end{cases}$$

*cioè **integriamo il polinomio e deriviamo la funzione arcotangente**.*
Ad esempio

$$\int x\arctan(x)\,\mathrm{d}x \overset{i.p.}{=} -\int \frac{x^2}{2}\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}x^2\arctan(x) = -\frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}x^2\arctan(x)\,.$$

Per calcolare l'ultimo integrale ragiono in questo modo

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int 1\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = x - \arctan(x) + c\,.$$

7.3 Integrazione per sostituzione

Teorema 7.3.1 (Formula di integrazione per sostituzione)**.** *Siano f, $g : (a,b) \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili con derivata continua. Allora*

$$\int f'(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = f(g(x)) + c\,. \tag{7.3.1}$$

Dimostrazione. La formula per il calcolo della derivata della funzione composta da'

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f\circ g)(x) = f'(g(x))g'(x) \qquad \forall\, x \in (a,b).$$

Calcolando l'integrale indefinito di entrambi i membri e osservando che

$$\int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f\circ g)(x)\,\mathrm{d}x = f(g(x)) + c\,,$$

ottengo (7.3.1). □

Come conseguenza immediata della (7.2.1), otteniamo le seguenti formule

$$\forall\, r \in \mathbb{R}\setminus\{-1\} \qquad \int g(x)^r g'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{g(x)^{r+1}}{r+1} + c\,, \tag{7.3.2a}$$

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x = \ln(|g(x)|) + c\,, \tag{7.3.2b}$$

$$\int \sin(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(g(x)) + c\,, \tag{7.3.2c}$$

$$\int \cos(g(x))\,\mathrm{d}x = \sin(g(x)) + c\,, \tag{7.3.2d}$$

$$\int \frac{g'(x)}{\cos^2(g(x))}\,\mathrm{d}x = \int g'(x)\left(1+\tan^2(g(x))\right)\,\mathrm{d}x = \tan(g(x)) + c\,, \tag{7.3.2e}$$

$$\int g'(x)e^{g(x)}\,\mathrm{d}x = e^{g(x)} + c\,, \tag{7.3.2f}$$

$$\int \frac{g'(x)}{1+g(x)^2}\,\mathrm{d}x = \arctan(g(x)) + c\,. \tag{7.3.2g}$$

Integrazione per sostituzione. Operativamente, applichiamo la formula di integrazione per sostituzione in questo modo: dovendo integrare

$$\int k(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

effettuiamo la sostituzione

$$u = g(x)\,. \tag{7.3.3}$$

Procediamo formalmente: derivando la (7.3.3), otteniamo

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = g'(x) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}u = g'(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Allora, denotando con K una primitiva di k, si ha che

$$\int k(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \int k(u)\,\mathrm{d}u = K(u) + c = K(g(x)) + c\,,$$

ove l'ultima uguaglianza si ottiene risostituendo $g(x)$ a u.

Esempio 7.3.2. Calcoliamo

$$\int \arctan(x)\mathrm{d}x$$

combinando la tecnica di integrazione per parti con la tecnica di integrazione per sostituzione. Integrando per parti, otteniamo

$$\int \arctan(x)\,\mathrm{d}x = \int 1\arctan(x)\,\mathrm{d}x \overset{i.p.}{=} -\int x\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + x\arctan(x)\,.$$

Per calcolare il secondo integrale indefinito $\int x\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ procediamo per sostituzione, ponendo $u = x^2$. Allora $\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$, quindi

$$\int x\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\ln(|1+u|) = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c\,.$$

Concludiamo che

$$\int \arctan(x)\,\mathrm{d}x = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c\,.$$