Dispense di Matematica–Analisi Matematica

Riccarda Rossi

Corso di Laurea in Disegno Industriale

Università degli Studi di Brescia

Anno Accademico 2009/2010

Capitolo 1

Nozioni preliminari

Capitolo 2

Prime proprietà delle funzioni

2.1 Il concetto di funzione

Definizione 2.1.1. *Siano A e B due insiemi non vuoti. Una* funzione *f definita su A e a valori in B ($f : A \to B$) è una legge che ad ogni elemento $x \in A$ associa* <u>uno e un solo</u> *elemento $f(x) \in B$. In questo contesto, l'insieme A è detto il* dominio *di f e B il* codominio *di f.*

Si noti che il codominio non è univocamente definito: se $f : A \to B$, allora ogni insieme C tale che $B \subset C$ è un codominio per f. Denoteremo il dominio di f (detto anche *insieme di definizione* di f) con i simboli: $\mathrm{dom}(f)$, D_f. Inoltre, useremo la notazione

$$x \in \mathrm{dom}(f) \mapsto f(x)$$

per denotare la legge che alla *variabile indipendente* x associa la sua *immagine* $f(x)$.

Definizione 2.1.2. *Data una funzione $f : A \to B$ (quindi $A = \mathrm{dom}(f)$), chiamiamo:*

1. insieme immagine *di f l'insieme*

$$\mathrm{im}(f) := \{y \in B \; : \; y = f(x), \; x \in A\}$$

(useremo anche la notazione $f(A)$);

2. grafico *di f l'insieme*

$$\mathrm{graf}(f) := \{(x, y) \in A \times B \, : x \in A, \; y = f(x)\} \; .$$

Esempio 2.1.3. 1. Consideriamo la funzione f che a ogni numero reale non negativo r associa l'area del cerchio di raggio r, cioè $f(r) := \pi r^2$ per ogni $r \geq 0$. In questo caso $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}^+$, $\mathrm{im}(f) = \mathbb{R}^+$, e $\mathrm{graf}(f) \subset \mathbb{R}^2$.

2. Sia L una lamina piana (quindi L può essere identificata con un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$) e consideriamo la funzione T che al generico punto $(x, y) \in L$ associa la temperatura della lamina in tale punto. In questo caso $\mathrm{dom}(f) = L \subset \mathbb{R}^2$, mentre $\mathrm{im}(f) \subset \mathbb{R}^+$, e $\mathrm{graf}(f) \subset \mathbb{R}^3$.

3. La legge $f : \{-1, 1\} \to \{a, b, c\}$ definita da

$$f(-1) = a, \quad f(1) = c, \quad f(-1) = b$$

NON È una funzione: ribadiamo che ad ogni elemento del dominio deve essere associato **uno e un solo** elemento del codominio.

Nel seguito considereremo solo funzioni <u>a valori reali</u>, <u>di una sola variabile reale</u>, cioè funzioni della forma

$$f : \mathrm{dom}(f) \to \mathbb{R}, \quad \text{ove } \mathrm{dom}(f) \subset \mathbb{R}^1.$$

Si noti che, in questo caso,

$$\mathrm{graf}(f) \subset \mathrm{dom}(f) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2.$$

Osservazione 2.1.4. Segue dalla definizione di funzione che è proibito che, dato un certo $\bar{x} \in \mathrm{dom}(f)$, esistano y_1, $y_2 \in \mathbb{R}$, con $y_1 \neq y_2$, tali che $(\bar{x}, y_1)$ e $(\bar{x}, y_2) \in \mathrm{graf}(f)$: se così fosse, si avrebbe infatti $f(\bar{x}) = y_1$ e $f(\bar{x}) = y_2$, cioè a $\bar{x}$ verrebbero associati due diversi elementi y_1 e y_2.

Infatti, **condizione necessaria e sufficiente affinché un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ sia il grafico di una funzione è che ogni retta parallela all'asse delle y intersechi tale sottoinsieme in al massimo un punto.**

Ribadiamo che una funzione si considera ben definita quando vengono forniti:

- sia la formula che definisce f,
- sia il dominio di f.

Quindi, due funzioni f_1 e f_2 coincidono se e solo se

$$\mathrm{dom}(f_1) = \mathrm{dom}(f_2) \ \text{ e } \ f_1(x) = f_2(x) \ \forall\, x \in \mathrm{dom}(f_1) = \mathrm{dom}(f_2).$$

Ad esempio, le funzioni $f_1(x) = x^2 \ \forall\, x \geq 0$ e $f_2(x) = x^2 \ \forall\, x \in \mathbb{R}$ **non coincidono**, cosa che si può vedere anche dal confronto fra i rispettivi grafici: il grafico di f_2 è la parabola $y = x^2$, mentre il grafico di f_1 è il ramo della parabola $y = x^2$ contenuto nel primo quadrante.

Il dominio naturale di definizione. Quando una funzione di variabile reale e a valori reali è data senza che ne venga specificato il dominio, si sottintende che il suo dominio sia l'insieme di tutti gli $x \in \mathbb{R}$ per i quali il valore $f(x)$ ha senso ed è un numero reale.

Esempio 2.1.5. 1.

$$f_1(x) := \frac{1}{x^2 - 1}\,.$$

In questo caso, $\mathrm{dom}(f_1) = \{x \in \mathbb{R} : \ x^2 - 1 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : \ x \neq \pm 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

2.

$$f_2(x) := \sqrt{4 - x^2}\,.$$

In questo caso, $\mathrm{dom}(f_2) = \{x \in \mathbb{R} : \ 4 - x^2 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : \ x^2 - 4 \leq 0\} = [-2, 2]$.

2.2 Funzioni suriettive e iniettive

Preliminarmente, diamo la seguente

Definizione 2.2.1. *Sia $f : A \to B$. Dato $y \in B$, un elemento $x \in A$ si chiama* controimmagine *di y tramite f se esso verifica*

$$f(x) = y.$$

Denotiamo con $f^{-1}(\{y\})$ l'insieme (eventualmente vuoto) delle controimmagini di y tramite f.

È chiaro che

$$y \in \mathrm{im}(f) \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset\,. \tag{2.2.1}$$

Osservazione 2.2.2 (Interpretazione grafica della controimmagine nel caso di funzioni reali di variabile reale)**.** Data $f : \mathrm{dom}(f) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e dato un valore $\bar{y} \in \mathbb{R}$, si può individuare graficamente l'insieme controimmagine di $\bar{y}$ $f^{-1}(\{\bar{y}\})$ in questo modo: si considera la retta orizzontale $y = \bar{y}$ e se ne cercano intersezioni con $\mathrm{graf}(f)$:

- se $y = \bar{y}$ non interseca $\mathrm{graf}(f)$ in alcun punto, allora $f^{-1}(\{\bar{y}\}) = \emptyset$;
- viceversa, per ogni punto $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathrm{graf}(f)$ (chiaramente $(x, \bar{y})$ appartiene alla retta $y = \bar{y}$), si ha che $\bar{x} \in f^{-1}(\{\bar{y}\})$.

Suriettività.

Ricordando la Definizione 2.1.2 di insieme immagine, diamo la seguente:

Definizione 2.2.3. *Sia $f : A \to B$. Diciamo che f è* suriettiva *se $\mathrm{im}(f) = B$ (cioè quando l'insieme immagine di f coincide con il codominio).*

Osservazione 2.2.4. Si osservi che se consideriamo una funzione $f : A \to B$ come a valori nell'insieme immagine di f, cioè $f : A \to \mathrm{im}(f)$ (questo è possibile: anche $\mathrm{im}(f)$ è un codominio ammissibile), allora

$$f : A \to \mathrm{im}(f) \quad \text{è suriettiva.}$$

Questo mostra che la suriettività di una funzione dipende dalla scelta del codominio.

Osservazione 2.2.5 (Importante). *Nel caso di una funzione reale di variabile reale, cioè*

$$f : \mathrm{dom}(f) \to \mathbb{R}, \quad \textit{ove } \mathrm{dom}(f) \subset \mathbb{R},$$

considereremo sempre come codominio l'insieme $\mathbb{R}$. Quindi

$$f \textit{ è suriettiva se } \mathrm{im}(f) = \mathbb{R}.$$

Osservazione 2.2.6 (Interpretazione grafica di suriettività per funzioni reali di variabile reale)**.** Sia $f : \mathrm{dom}(f) \to \mathbb{R}$ una funzione reale di variabile reale. Segue da (2.2.1) e dalla discussione sviluppata nell'Osservazione 2.2.2 che un numero reale $\bar{y}$ appartiene all'insieme immagine di f se, considerando la retta parallela all'asse x e passante per il punto $y = \bar{y}$ (cioè la retta $y = \bar{y}$), tale retta interseca il $\mathrm{graf}(f)$ in almeno un punto. Quindi:

- f è suriettiva se, per ogni $\bar{y} \in \mathbb{R}$, la retta $y = \bar{y}$ interseca $\mathrm{graf}(f)$ in **almeno** un punto.

Iniettività.

Definizione 2.2.7. *Sia $f : A \to B$. Diciamo che f è* iniettiva *se*

$$\forall\, x_1,\, x_2 \in A, \qquad f(x_1) = f(x_2) \;\Rightarrow\; x_1 = x_2\,, \tag{2.2.2}$$

o, equivalentemente,

$$\forall\, x_1,\, x_2 \in A, \qquad x_1 \neq x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \neq f(x_2)\,.$$

Si noti che con la (2.2.2) si richiede che

$$\text{ogni elemento } y \in B \text{ abbia al più una controimmagine;} \tag{2.2.3}$$

cioè, se $y \in B \setminus \mathrm{im}(f)$, si avrà $f^{-1}(\{y\}) = \emptyset$, mentre se $y \in \mathrm{im}(f)$, l'insieme $f^{-1}(\{y\})$ consisterà di un solo elemento[2]. In altri termini, a ogni elemento $y \in \mathrm{im}(f)$ viene associata una e una sola controimmagine $x \in \mathrm{dom}(f)$.

Osservazione 2.2.8 (Interpretazione grafica di iniettività per funzioni reali di variabile reale)**.** Sia $f : \mathrm{dom}(f) \to \mathbb{R}$ una funzione reale di variabile reale. Segue da (2.2.3) e dalla discussione sviluppata nell'Osservazione 2.2.2 che

- f è iniettiva se, <u>per ogni</u> $\bar{y} \in \mathbb{R}$, la retta $y = \bar{y}$ interseca graf(f) in **al più**[3] un punto.

Concludiamo con la seguente definizione, che non verrà mai richiamata nel seguito delle dispense, ma che comunque diamo per completezza di esposizione.

Definizione 2.2.9. *Sia $f : A \to B$. Diciamo che f è* biiettiva *se*

- *f è suriettiva,*
- *f è iniettiva.*

Ricordando l'Osservazione 2.2.4, notiamo che, se $f : A \to B$ è una funzione iniettiva, allora, prendendo come codominio di f il più piccolo insieme possibile (cioè $\mathrm{im}(f)$), si ha che $f : A \to \mathrm{im}(f)$ è chiaramente biiettiva. Questo evidenzia che la biettività di una funzione dipende dalla scelta del codominio.

2.3 Invertibilità

Sia $f : D_f \to \mathbb{R}$, ove $D_f \subset \mathbb{R}$, una funzione <u>iniettiva</u>. Segue da (2.2.3) che

$$\forall\, y \in \mathrm{im}(f) \;\; \exists!\, x \in D_f \;:\; f(x) = y\,. \tag{2.3.1}$$

Possiamo quindi considerare la funzione che a ogni $y \in \mathrm{im}(f)$ associa l'<u>unico</u> $x \in D_f$ verificante $f(x) = y$. Tale funzione avrà quindi come dominio l'insieme immagine di f, e come codominio il dominio di f.

Definizione 2.3.1. *Sia $f : D_f \to \mathbb{R}$ una funzione <u>iniettiva</u>. Chiamiamo* funzione inversa *di f la funzione $f^{-1} : \mathrm{im}(f) \to D_f$ definita da*

$$\forall\, y \in \mathrm{im}(f), \qquad f^{-1}(y) = x \quad\Leftrightarrow\quad y = f(x)\,. \tag{2.3.2}$$

Sottolineiamo che **la sola iniettività è sufficiente a garantire l'invertibilità.**

[2] Gli insiemi costituiti da un unico elemento vengono detti *singoletti.*

[3] cioè uno solo oppure nessuno

Proprietà della funzione inversa.

- $$\mathrm{dom}(f^{-1}) = \mathrm{im}(f)\,, \mathrm{im}(f^{-1}) = \mathrm{dom}(f)\,.$$

  La prima uguaglianza viene dalla definizione di funzione inversa, mentre con

  $$\mathrm{im}(f^{-1}) = \mathrm{dom}(f)$$

  affermiamo che non solo $\mathrm{dom}(f)$ è il codominio di f^{-1}, ma coincide l'insieme immagine di f^{-1}.

  Verifichiamo ciò: fissato $x \in \mathrm{dom}(f)$, bisogna trovare una controimmagine di x tramite f^{-1}, cioè un $y \in \mathrm{dom}(f^{-1}) = \mathrm{im}(f)$ tale che $f^{-1}(y) = x$, cioè, per la definizione di f^{-1}, $y = f(x)$. Ma allora dato $x \in \mathrm{dom}(f)$, prendiamo come sua controimmagine tramite f^{-1} proprio $f(x)$.

  In questo modo concludiamo che $\mathrm{dom}(f) \subset \mathrm{im}(f^{-1})$.

  L'inclusione opposta $\mathrm{im}(f^{-1}) \subset \mathrm{dom}(f)$ (che ci permette di concludere l'uguaglianza fra i due insiemi) deriva dal fatto che, per definizione di funzione inversa, $\mathrm{dom}(f)$ è (un) codominio per f^{-1}.

- la funzione $f^{-1} : \mathrm{im}(f) \to \mathrm{dom}(f)$ è iniettiva. In effetti, siano dati y_1, $y_2 \in \mathrm{im}(f)$ tali che $f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2)$. Chiamiamo x l'elemento $f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2) \in \mathrm{dom}(f)$. Per definizione di f^{-1}, $x = f^{-1}(y_1)$ equivale a $f(x) = y_1$ e analogamente $x = f^{-1}(y_2)$ equivale a $f(x) = y_2$. Ma f è una funzione: quindi a x viene associato uno e un solo elemento tramite f. Necessariamente y_1 e y_2 coincidono, il che prova l'iniettività di f^{-1}.

- La funzione $f^{-1} : \mathrm{im}(f) \to \mathrm{dom}(f)$ è biiettiva. Questo è chiaro poiché essa è iniettiva e il suo codominio $\mathrm{dom}(f)$ coincide con il suo insieme immagine $\mathrm{im}(f^{-1})$.

D'ora in poi, useremo indifferentemente la lettera y o la x per denotare la variabile indipendente della funzione inversa f^{-1}.

Il grafico della funzione inversa. Il grafico di f^{-1} si ottiene considerando la curva simmetrica del $\mathrm{graf}(f)$ rispetto alla bisettrice del primo e del terzo quadrante $y = x$.

2.4 Funzioni pari, dispari, e periodiche

2.4.1 Parità e disparità

Definizione 2.4.1. *Diciamo che un insieme $D \subset \mathbb{R}$ è* simmetrico rispetto all'origine *se gode della seguente proprietà:*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\,, \quad x \in D \quad \Leftrightarrow \quad -x \in D\,.$$

Ad esempio, sono insiemi simmetrici rispetto all'origine tutti gli intervalli della forma $(-M, M)$, con $M > 0$. Ma anche l'insieme $I = \{7\} \cup [-5, -3) \cup \{-2\} \cup \{2\} \cup (3, 5] \cup \{7\}$ è simmetrico rispetto all'origine.

Definizione 2.4.2. *Sia $f : D_f \to \mathbb{R}$, con $D_f \subset \mathbb{R}$* simmetrico rispetto all'origine. *Diciamo che*

- *f è* pari *se*

  $$f(x) = f(-x) \qquad \forall\, x \in D_f\,;$$

- f *è* dispari *se*

$$f(x) = -f(-x) \qquad \forall\, x \in D_f\,.$$

Si noti che:

- la definizione di funzione pari/dispari ha significato solo su domini simmetrici rispetto all'origine;
- se $D_f \subset \mathbb{R}$ è *simmetrico rispetto all'origine* e $\mathbf{0} \in \mathbf{D_f}$, e se $f : D_f \to \mathbb{R}$ è una funzione dispari, necessariamente $f(0) = 0$[4].
- Se una funzione $f : D \to \mathbb{R}$ è pari o dispari, allora il suo grafico ha la seguente notevole proprietà:
  - se f è pari, allora graf(f) è **simmetrico rispetto all'asse** y;
  - se f è dispari, allora graf(f) è **simmetrico rispetto all'origine degli assi**.

  Quindi, per disegnare il grafico qualitativo di una funzione pari o dispari, è sufficiente conoscerne l'andamento solo per $x \geq 0$: il grafico completo si otterrà facendo l'opportuna simmetria.

2.4.2 Periodicità

Definizione 2.4.3. *Sia $T > 0$ e $D \subset \mathbb{R}$ un insieme non vuoto con la proprietà che*

$$\forall\, x \in D, \qquad x + T \in D\,. \tag{2.4.1}$$

Diciamo che una funzione $f : D \to \mathbb{R}$ è periodica di periodo T *(brevemente, T-*periodica*), se si ha*

$$f(x+T) = f(x) \qquad \forall\, x \in D\,. \tag{2.4.2}$$

Godono della proprietà (2.4.1) per esempio gli insiemi $D = \mathbb{R}$, per ogni $T > 0$, e $D = \mathrm{dom}(\tan)$, per $T = \pi$, (si denota tan la funzione tangente, che verrà definita nella Sezione 2.5.7.
Si noti che se $f : D \to \mathbb{R}$ è una funzione T-periodica, f è anche periodica di periodo kT per ogni $k \in \mathbb{N}$. Il minimo $T' > 0$ per il quale f è periodica di periodo T', se esiste, viene chiamato *periodo minimo.*
Nel seguito presentiamo alcuni notevoli esempi di funzioni periodiche.

2.5 Funzioni elementari

Vengono comunemente definite *funzioni elementari* le

- le funzioni potenza a esponente naturale, intero, razionale, e reale;
- le funzioni esponenziali di base $a > 0$;
- le funzioni logaritmiche di base $a > 0$, con $a \neq 1$;

[4]in quanto, per la disparità, si ha $f(0) = -f(-0) = -f(0)$: l'unica possibilità perché valga ciò è che $f(0)$ sia 0.

- le funzioni trigonometriche sin, cos, tan[5];
- le funzioni trigonometriche inverse arcsin, arccos, arctan.

Ricordiamo brevemente alcune proprietà delle funzioni elementari. Per i grafici delle funzioni elementari rimandiamo alla tabella distribuita a lezione.
I GRAFICI DELLE FUNZIONI ELEMENTARI DEVONO ESSERE MEMORIZZATI.

2.5.1 Le funzioni potenza a esponente naturale

Consideriamo le funzioni

$$x \in \mathbb{R} \mapsto x^n, \qquad \text{con } n \in \mathbb{N} \quad \text{e dominio } D_f = \mathbb{R}\,.$$

1. Per $n = 0$, otteniamo la funzione costante

$$f(x) = x^0 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

   Si ha che $f(x) \equiv 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Il grafico di tale funzione è la retta $y = 1$. Chiaramente $\mathrm{im}(f) = \{1\}$, quindi f non è né suriettiva, né iniettiva. f è pari. f è periodica con periodo $T > 0$ **per ogni** $T > 0$ (quindi f non ha periodo minimo). **Le considerazioni appena sviluppate valgono anche per la generica funzione costante $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{c}$**, con $c \in \mathbb{R}$.

2. Per $n = 1$, otteniamo la funzione identità

$$f(x) = x \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

   Il suo grafico è la bisettrice del primo e del terzo quadrante $y = x$. È immediato vedere che f è iniettiva e che $\mathrm{im}(f) = \mathbb{R}$, quindi f è anche suriettiva. Inoltre f è dispari.

   - più in generale, consideriamo la funzione lineare

$$f(x) = ax + b \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0.$$

     Il suo grafico è la retta $y = ax + b$. f è iniettiva e $\mathrm{im}(f) = \mathbb{R}$, quindi f è anche suriettiva. Inoltre, f è dispari se e solo se $b = 0$.
   - A partire dalla funzione identità definiamo la funzione modulo

$$|x| := \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0\,, \\ -x & \text{se } x < 0\,. \end{cases}$$

     Si vede subito che l'insieme immagine della funzione modulo è la semiretta positiva $[0, +\infty)$, quindi $|\cdot|$ non è suriettiva. Essendo

$$|x| = |-x| \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

     (in virtù della definizione di modulo), si ha che la funzione modulo $|\cdot|$ è pari, e quindi non è neppure iniettiva.

[5] non tratteremo le funzioni *cotangente* cot, *secante* sec, *cosecante* csc, e neppure le funzioni iperboliche sinh, cosh, tanh, coth..

3. Per $n = 2$, otteniamo la funzione quadratica

$$f(x) = x^2 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

Il suo grafico è la parabola $y = x^2$. Si ha che $\mathrm{im}(f) = [0, +\infty)$ (quindi f non è suriettiva). Inoltre f è pari, quindi non è iniettiva. Notiamo tuttavia che le funzioni

$$\begin{array}{ll} f|_{[0,+\infty)} & \text{restrizione di } x \mapsto x^2 \text{ a } [0,+\infty), \\ f|_{(-\infty,0]} & \text{restrizione di } x \mapsto x^2 \text{ a } (-\infty,0], \end{array} \qquad \text{sono iniettive.}$$

4. Per $n = 3$, otteniamo la funzione cubica

$$f(x) = x^3 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

Il suo grafico è la curva cubica $y = x^3$. Si vede che $\mathrm{im}(f) = \mathbb{R}$, quindi f è suriettiva. Inoltre f è iniettiva. Si verifica immediatamente che f è dispari.

5. In generale, le funzioni potenza a esponente **naturale pari**

$$f(x) = x^{2k} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \text{con } k \in \mathbb{N}\,,\ k \geq 1,$$

hanno le stesse proprietà e lo stesso andamento grafico qualitativo della funzione $f(x) = x^2$.

6. In generale, le funzioni potenza a esponente **naturale dispari**

$$f(x) = x^{2k+1} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \text{con } k \in \mathbb{N}\,,\ k \geq 1,$$

hanno le stesse proprietà e lo stesso andamento grafico qualitativo della funzione $f(x) = x^3$.

Definizione 2.5.1. *Chiamiamo* funzione polinomiale *una funzione $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ della forma*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

ove i coefficienti a_i, $i = 1, \ldots, n$, sono numeri reali, con $a_n \neq 0$, e il numero $n \in \mathbb{N}$ viene detto grado del polinomio.

2.5.2 Le funzioni potenza a esponente intero negativo

Consideriamo le funzioni

$$x \in \mathbb{R} \mapsto x^{-n} := \frac{1}{x^n}, \qquad \text{con } n \in \mathbb{N}, \quad n > 0, \quad \text{e dominio } D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}\,.$$

1. Per $n = 1$, otteniamo la funzione reciproco

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,.$$

Il suo grafico è l'iperbole $y = \frac{1}{x}$. Si ha che $\mathrm{im}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, quindi f non è suriettiva. f è iniettiva e dispari.

2. Per $n = 2$, otteniamo la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,.$$

Si ha che $\mathrm{im}(f) = (0, +\infty)$, quindi f non è suriettiva. Inoltre, f è pari, quindi non è iniettiva.

3. In generale, le funzioni potenza a esponente **intero negativo pari**

$$f(x) = x^{-2k} := \frac{1}{x^{2k}} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \qquad \text{con } k \in \mathbb{N}\,,$$

hanno le stesse proprietà e lo stesso andamento grafico qualitativo della funzione $f(x) = x^{-2}$.

4. In generale, le funzioni potenza a esponente **intero negativo dispari**

$$f(x) = x^{-(2k+1)} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \qquad \text{con } k \in \mathbb{N}\,,$$

hanno le stesse proprietà e lo stesso andamento grafico qualitativo della funzione $f(x) = x^{-3}$.

Definizione 2.5.2. *Chiamiamo* funzione razionale fratta *una funzione data dal quoziente di due polinomi, cioè della forma*

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0} \qquad \begin{cases} a_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, n, & a_n \neq 0 \\ b_j \in \mathbb{R},\ j = 1, \ldots, m, & b_m \neq 0 \end{cases}.$$

Il dominio di f è allora $\mathrm{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} :\ b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0 \neq 0\}$.

2.5.3 Inverse delle funzioni potenza a esponente naturale (strettamente positivo)

- La funzione identità $f(x) = x$ è iniettiva su $\mathbb{R}$, quindi invertibile. Poichè $\mathrm{im}(f) = \mathbb{R}$, la funzione inversa f^{-1} è definita su $\mathbb{R}$. Si vede immediatamente che $f(x) = x$ coincide con la sua inversa.

- Più in generale, la funzione lineare $f(x) = ax + b$, con $a \neq 0$, è invertibile. Essendo $\mathrm{im}(f) = \mathbb{R}$, si ha che f^{-1} è definita su tutto $\mathbb{R}$. Si verifica immediatamente che

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{a} - \frac{b}{a} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

Prima di introdurre le inverse delle funzioni potenza $f(x) = x^n$, con $n \geq 2$, diamo la seguente

Definizione 2.5.3. *Siano $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, e $x \in [0, +\infty)$. Chiamiamo* radice n-esima di x *l'unico numero $y \in [0, +\infty)$ verificante $y^n = x$. Useremo la notazione $y = \sqrt[n]{x}$.*

Distinguiamo i seguenti casi:

1. $n \geq 2$, n **pari**: in questo caso, la funzione $x \mapsto x^n$ è pari, quindi non è invertibile su tutto $\mathbb{R}$. **Si conviene di considerare la restrizione di f alla semiretta** $[0, +\infty)$. Tale restrizione ha ancora come insieme immagine la semiretta $[0, +\infty)$ ed è una funzione iniettiva, quindi invertibile. La funzione inversa avrà quindi come dominio la semiretta $[0, +\infty)$, e come insieme immagine il dominio della restrizione di x^n a $[0, +\infty)$. Allora l'insieme immagine della funzione inversa è $[0, +\infty)$. Si vede immediatamente che

$$f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} \qquad \forall\, x \in [0, +\infty)\,.$$

2. $n \geq 2$, n **dispari**: in questo caso, la funzione $x \mapsto x^n$ è iniettiva, quindi è invertibile su tutto $\mathbb{R}$. Il suo insieme immagine è $\mathbb{R}$. Quindi la funzione f^{-1} è definita su $\mathbb{R}$, con $\mathrm{im}(f^{-1}) = \mathbb{R}$. Si ha
$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[n]{x} & \forall\, x \in [0, +\infty)\,, \\ -\sqrt[n]{-x} & \forall\, x \in (-\infty, 0)\,. \end{cases}$$

In generale, useremo la notazione $x^{1/n}$ per la funzione inversa di x^n. Si hanno quindi le formule

$$x^{1/n} = \sqrt[n]{x} \qquad \text{per } n \geq 2,\ n \text{ PARI},$$
$$x^{1/n} = \begin{cases} \sqrt[n]{x} & \forall\, x \in [0, +\infty)\,, \\ -\sqrt[n]{-x} & \forall\, x \in (-\infty, 0)\,, \end{cases} \qquad \text{per } n \geq 2,\ n \text{ DISPARI.}$$

2.5.4 Le funzioni potenza a esponente razionale e reale

Funzioni potenza a esponente razionale. Vogliamo ora definire le funzioni $f(x) = x^q$, con $q \in \mathbb{Q}$. Distingueremo il caso $q > 0$ dal caso $q < 0$[6].

- $q > 0$: allora $q = \frac{m}{n}$, con m, $n \in \mathbb{Z}$, m, $n \neq 0$, e concordi. Non è limitativo supporre che m e n siano entrambi strettamente positivi. Allora definiamo
$$x^q = x^{m/n} := (x^{1/n})^m \qquad \begin{cases} \forall\, x \in D_f = [0, +\infty) & \text{se } n \text{ è pari,} \\ \forall\, x \in D_f = \mathbb{R} & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

- caso $q < 0$. Non è limitativo supporre che $q = -\frac{m}{n}$, con m, $n \in \mathbb{N}$, m, $n > 0$. Allora definiamo
$$x^q = x^{-m/n} := \frac{1}{x^{m/n}} \qquad \begin{cases} \forall\, x \in D_f = (0, +\infty) & \text{se } n \text{ è pari,} \\ \forall\, x \in D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Osserviamo quindi che **il dominio naturale della generica funzione x^q è $(0, +\infty)$.**

Funzioni potenza a esponente reale. Dato $r \in \mathbb{R}$, definiamo la funzione potenza $x \mapsto x^r$ sfruttando la densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$. Quest'ultima proprietà assicura infatti che
$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists\, q \in \mathbb{Q} : \quad |r - q| < \varepsilon,$$
cioè che il numero reale $r \in \mathbb{R}$ può essere approssimato "arbitrariamente bene" da numeri razionali $q \in \mathbb{Q}$. Allora si può definire x^r tramite approssimazione[7] con le potenze x^q, $q \in \mathbb{Q}$, che abbiamo testè definito. Poiché il dominio naturale della generica potenza x^q è $(0, +\infty)$, abbiamo che

$$\text{per ogni } r \in \mathbb{R}, \text{ il dominio naturale della funzione } \ x \mapsto x^r \ \text{ è } (0, +\infty).$$

[6] abbiamo già studiato il caso $q = 0$!

[7] lo sviluppo rigoroso di questo procedimento di approssimazione si basa sulla nozione di *limite di una successione*, che non verrà affrontata in questo corso.

2.5.5 Le funzioni esponenziali

Sia a un numero reale strettamente positivo e consideriamo la funzione esponenziale di base a

$$x \in \mathbb{R} \mapsto a^x, \qquad \text{con dominio } D_f = \mathbb{R}\,.$$

Si osservi che, per dare senso alla potenza a^x con esponente reale x, il numero a deve essere strettamente positivo!

Proprietà delle funzioni esponenziali. Valgono per ogni base $a \in (0, +\infty)$ le seguenti proprietà:

1. $a^0 = 1$,
2. $a^{x+y} = a^x a^y$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$,
3. $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$,
4. $(a^x)^y = a^{xy}$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$,
5. $(ab)^x = a^x b^x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, per ogni $b > 0$.

Abbiamo tre tipi di andamenti grafici qualitativi per le funzioni esponenziali:

1. $a = 1$. In questo caso $f(x) = 1^x \equiv 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, cioè ritroviamo la funzione costantemente uguale a 1.
2. $a > 1$. In questo caso $\mathrm{im}(f) = (0, +\infty)$, quindi f non è suriettiva. f è invece iniettiva. Un caso notevole si ha per $a = e = 2,7218......$, la costante di Nepero (o costante di Eulero). Nel caso $a = e$ si usa

   $$\text{la notazione alternativa} \quad e^x \equiv \exp(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

3. $0 < a < 1$. In questo caso $\mathrm{im}(f) = (0, +\infty)$, quindi f non è suriettiva. f è invece iniettiva.

Si noti la relazione

$$\left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{a^x} = a^{-x} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R} \quad \forall\, a > 0\,,$$

che permette di passare dal caso 2. al caso 3. e viceversa.

2.5.6 Le funzioni logaritmiche

Le funzioni esponenziali $x \in \mathbb{R} \mapsto a^x$ sono iniettive (quindi invertibili) per $a \neq 1$ e, in tal caso, hanno come insieme immagine $(0, +\infty)$.

Definizione 2.5.4. *Sia $a \in (0, +\infty)$, $a \neq 1$. Chiamiamo* funzione logaritmica in base a *(o* logaritmo in base a*) la funzione inversa dell'esponenziale $x \mapsto a^x$, e usiamo la notazione* $\log_a$*. Nel caso particolare in cui $a = e$, useremo la notazione* ln *(o semplicemente* log*) invece di* $\log_e$ *e ci riferiremo alla funzione* ln *con il nome* logaritmo naturale*.*

- Per definizione di funzione inversa, la funzione $\log_a$ è data dalla formula

$$\forall\, x > 0 \quad \log_a(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x$$

  cioè *il logaritmo in base a di un numero strettamente positivo x è quel numero reale y tale che a elevato alla y sia uguale a x.*

- In particolare, segue dal fatto che $a^0 = 1$ che

$$\log_a(1) = 0 \qquad \forall\, a \in (0, +\infty),\ a \neq 1.$$

- Per costruzione si che per ogni $a \in (0, +\infty)$, $a \neq 1$

$$\mathrm{dom}(\log_a) = (0, +\infty), \qquad \mathrm{im}(\log_a) = \mathbb{R}, \qquad \log_a \text{ è iniettiva.}$$

Abbiamo due tipi di andamenti grafici qualitativi per le funzioni logaritmiche (si noti che per ogni $a \in (0, +\infty)$, $a \neq 1$. il grafico di $\log_a$ passa per il punto $(1, 0)$):

1. $a > 1$. In questo caso il grafico di $\log_a$ si ottiene considerando il simmetrico (rispetto alla retta $y = x$) del grafico di $x \mapsto a^x$ nel caso $a > 1$.
2. $0 < a < 1$. In questo caso il grafico di $\log_a$ si ottiene considerando il simmetrico (rispetto alla retta $y = x$) del grafico di $x \mapsto a^x$ nel caso $0 < a < 1$.

Proprietà delle funzioni logaritmiche. Valgono per ogni base $a \in (0, +\infty)$, $a \neq 1$ le seguenti proprietà:

$$\log_a(1) = 0, \tag{2.5.1}$$
$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y) \qquad \text{per ogni } x, y > 0, \tag{2.5.2}$$
$$\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x) \qquad \text{per ogni } x > 0, \tag{2.5.3}$$
$$\log_a(x^y) = y \log_a(x) \qquad \text{per ogni } x \in (0, +\infty) \text{ e per ogni } y \in \mathbb{R}, \tag{2.5.4}$$
$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)} \qquad \text{per ogni } x > 0 \text{ e per ogni } b \in (0, +\infty),\ b \neq 1. \tag{2.5.5}$$

Da (2.5.2) e (2.5.3) segue che

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y) \qquad \forall\, x,\ y > 0.$$

Dimostriamo alcune di queste proprietà a partire dalle proprietà delle funzioni esponenziali, usando la relazione di inversione

$$y = \log_a(x) \ \Leftrightarrow \ a^y = x\,.$$

- Per dimostrare la (2.5.2), poniamo

$$z = \log_a(xy), \quad t = \log_a(x), \quad w = \log_a(y).$$

  Per definizione, si ha quindi

$$xy = a^z, \quad x = a^t, \quad y = a^w,$$

  da cui

$$xy = (a^t)(a^w) = a^{t+w}$$

ove l'ultima relazione segue dalle proprietà delle funzioni esponenziali. Quindi

$$xy = a^{t+w} \quad \Rightarrow t + w = \log_a(xy) = z,$$

che è la relazione che volevamo dimostrare.

- Per dimostrare la (2.5.3) osserviamo che

$$w = \log_a(x), \quad t = \log_a\left(\frac{1}{x}\right) \quad \Leftrightarrow \quad a^t = \frac{1}{x} = x^{-1} = (a^w)^{-1} = a^{-w}.$$

Allora da $a^t = a^{-w}$ e dall'iniettività della funzione esponenziale in base a concludiamo che

$$t = -w \quad \Rightarrow \quad \log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x).$$

Esercizio. Ragionando in modo completamente analogo, dimostrare la (2.5.4) e la (2.5.5).

2.5.7 Le funzioni trigometriche e le loro inverse

Definizione di seno e coseno mediante la circonferenza goniometrica. Si consideri un punto P che si muove sulla circonferenza goniometrica $x^2 + y^2 = 1$, percorrendola in senso antiorario, a partire dal punto $(1, 0)$. Sia $t > 0$ la lunghezza dell'arco di circonferenza compreso fra il punto $(1, 0)$ e il punto P. Si noti che t è la misura in radianti dell'angolo compreso fra il segmento congiungente $O = (0, 0)$ e $(1, 0)$, e il raggio OP.

D'altra parte, ogni valore $t \in [0, 2\pi]$ individua uno e un solo punto P sulla circonferenza trigonometrica, tale che l'arco orientato da $(1, 0)$ a P abbia lunghezza t (il punto corrispondente a $t = 0$ e $t = 2\pi$ è il punto $(1, 0)$). Possiamo quindi considerare il punto $P = P_t$ come in funzione del parametro t e definire le quantità *seno di* t e *coseno di* t.

$$\text{Fissato } t \in [0, 2\pi], \text{ definiamo} \quad \begin{cases} \cos(t) := \text{ascissa di } P_t, \\ \sin(t) := \text{ordinata di } P_t. \end{cases}$$

Estensione di seno e coseno a valori di $t \in \mathbb{R}$. Le funzioni sin e cos si estendono a $\mathbb{R}$ e verificano le relazioni

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x), \qquad \cos(x + 2\pi) = \cos(x) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R} \tag{2.5.6}$$

e

$$\sin(-x) = -\sin(x), \qquad \cos(-x) = \cos(x) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{2.5.7}$$

Valori fondamentali di sin **e** cos**, e formule di addizione.** Si ricava dalla definizione di sin e cos che

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1, \qquad -1 \leq \sin(x) \leq 1 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{2.5.8}$$

Inoltre si possono calcolare i seguenti valori fondamentali:

$$\begin{array}{lll}
t=0 & \sin(0)=0 & \cos(0)=1 \\[1ex]
t=\dfrac{\pi}{6} & \sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2} & \cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2} \\[1ex]
t=\dfrac{\pi}{4} & \sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2} & \cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2} \\[1ex]
t=\dfrac{\pi}{3} & \sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2} & \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2} \\[1ex]
t=\dfrac{\pi}{2} & \sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1 & \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0
\end{array}$$

Usando le formule di addizione per sin e cos

$$\begin{aligned}
\sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y)+\sin(y)\cos(x) \qquad && \forall\, x,\, y \in \mathbb{R}, \\
\sin(x-y) &= \sin(x)\cos(y)-\sin(y)\cos(x) \qquad && \forall\, x,\, y \in \mathbb{R}, \\
\cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y)-\sin(y)\sin(x) \qquad && \forall\, x,\, y \in \mathbb{R}, \\
\cos(x-y) &= \cos(x)\cos(y)+\sin(y)\sin(x) \qquad && \forall\, x,\, y \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

si ricavano a partire dai valori fondamentali altri valori di sin e cos su $[0,2\pi]$. Per esempio,

$$\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)=\sin\left(\frac{4}{6}\pi\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Tenendo conto di (2.5.6) e (2.5.7), ricaviamo infiniti altri valori fondamentali di sin e cos.

Le funzioni sin**,** cos**, e** tan**.** Richiamiamo alcune delle proprietà fondamentali delle funzioni trigonometriche.

- La funzione *seno*:
$$\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
è dispari (si veda (2.5.7)), 2π-periodica (si veda (2.5.6)), e ha come insieme immagine $[-1,1]$ (come si ricava da (2.5.8)).

- La funzione *coseno*:
$$\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
è pari (si veda (2.5.7)), 2π-periodica (si veda (2.5.6)), e ha come insieme immagine $[-1,1]$ (come si ricava da (2.5.8)). Inoltre, dalle formule di addizione per il seno si ottiene che
$$\cos(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$
Quindi (cf. la discussione sulle traslazioni di grafici nella Sezione 2.6), *il grafico di* cos *si ottiene traslando orizzontalmente il grafico di* sin *di* $\frac{\pi}{2}$*, nella direzione negativa dell'asse* x.

- La funzione *tangente* è definita dall'espressione
$$\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Il suo dominio naturale è dato da tutti gli $x \in \mathbb{R}$ per i quali $\cos(x) \neq 0$. Poiché

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0 \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z},$$

concludiamo che

$$\operatorname{dom}(\tan) = \left\{x \in \mathbb{R} \,:\, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ \forall\, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

La funzione tangente è dispari su dom(tan) (in quanto è quoziente di sin, dispari, e di cos, pari), π-periodica, ha come insieme immagine $\mathbb{R}$.

Funzioni trigonometriche inverse. Le funzioni sin, cos, e tan, essendo periodiche sui loro domini, sono ben lontane dall'essere iniettive (e quindi invertibili) sui rispettivi domini. Tuttavia, esistono dei sottoinsiemi di tali domini, dette *regioni fondamentali*, con la proprietà che le restrizioni di sin, cos e tan a questi sottoinsiemi sono iniettive (e quindi invertibili).

- Si conviene di considerare la restrizione di sin all'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Si verifica che

  $$\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} \ \text{ è iniettiva, e ha come insieme immagine } [-1,1].$$

  Chiamiamo *arcoseno* la funzione inversa della restrizione di sin a $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Quindi

  $$\arcsin = \left(\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\right)^{-1} : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

  è definito da

  $$\arcsin(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad \sin(y) = x$$

  (cioè l'arcoseno di x è l'arco y il cui seno è x), e ha come insieme immagine $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Il suo grafico si ottiene considerando la curva simmetrica del grafico del seno, ristretto a $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, rispetto alla retta $y = x$. La funzione arcsin è dispari.

- Si conviene di considerare la restrizione di cos all'intervallo $[0, \pi]$. Si verifica che

  $$\cos|_{[0,\pi]} \ \text{ è iniettiva, e ha come insieme immagine } [-1,1].$$

  Chiamiamo *arcocoseno* la funzione inversa della restrizione di cos a $[0, \pi]$. Quindi

  $$\arccos = \left(\cos|_{[0,\pi]}\right)^{-1} : [-1,1] \to [0,\pi],$$

  è definito da

  $$\arccos(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad \cos(y) = x$$

  (cioè l'arcocoseno di x è l'arco y il cui coseno è x), e ha come insieme immagine $[0, \pi]$. Il suo grafico si ottiene considerando la curva simmetrica del grafico del coseno, ristretto a $[0, \pi]$, rispetto alla retta $y = x$.

- Si conviene di considerare la restrizione di tan all'intervallo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Si verifica che

  $$\tan|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})} \ \text{ è iniettiva, e ha come insieme immagine } \mathbb{R}.$$

  Chiamiamo *arcotangente* la funzione inversa della restrizione di tan a $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Quindi

  $$\arctan = \left(\tan|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}\right)^{-1} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

è definita da
$$\arctan(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad \tan(y) = x$$
(cioè l'arcotangente di x è l'arco y la cui tangente è x), e ha come insieme immagine $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Il suo grafico si ottiene considerando la curva simmetrica del grafico della tangente, ristretta a $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, rispetto alla retta $y = x$. La funzione arctan è dispari.

2.6 Operazioni su funzioni

Composizione di funzioni. Consideriamo due funzioni
$$\begin{aligned} &g : D_g \to \mathbb{R}, \quad \text{data da } \ y = g(x) \ \ \forall\, x \in D_g\,, \\ &f : D_f \to \mathbb{R}, \quad \text{data da } \ z = f(y) \ \ \forall\, y \in D_f\,. \end{aligned}$$

Dato $x \in D_g$, vogliamo ora considerare il valore $f(g(x))$ (cioè applicare f a $g(x)$). Quest'operazione ha senso per tutti gli $x \in D_g$ tali che $g(x) \in D_f$. Per poterla effettuare, quindi, dobbiamo almeno richiedere che esistano degli $x \in D_g$ tali che $g(x) \in D_f$, cioè che $\mathrm{im}(g) \cap D_f \neq \emptyset$. Se questo vale, si ha che l'insieme $\mathcal{D} := \{x \in D_g \ : \ g(x) \in D_f\}$ non è vuoto. Per costruzione, per ogni $x \in \mathcal{D}$ ha senso considerare il valore $f(g(x))$. In questo modo, otteniamo una nuova funzione.

Definizione 2.6.1 (Funzione composta)**.** *Siano $g : D_g \to \mathbb{R}$ e $f : D_f \to \mathbb{R}$ due funzioni tali che*
$$\mathrm{im}(g) \cap D_f \neq \emptyset\,, \tag{2.6.1}$$
e sia
$$\mathcal{D} := \{x \in D_g \ : \ g(x) \in D_f\}. \tag{2.6.2}$$
Chiamiamo composizione di f con g *(o* funzione composta di f con g[8]*) la funzione $f \circ g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ definita da*
$$(f \circ g)(x) := f(g(x)) \qquad \forall\, x \in \mathcal{D}\,.$$

Osservazione 2.6.2. Si noti che, per costruzione, $\mathcal{D} \subset D_g$. Inoltre, se $\mathrm{im}(g) \subset D_f$, allora chiaramente per ogni $x \in D_g$ si ha che $g(x) \in D_f$, e quindi $\mathcal{D} = D_g$. Vogliamo però ribadire che la composizione $f \circ g$ ha senso non appena vale la (2.6.1). Allora, il dominio $D_{f \circ g}$ è dato dalla (2.6.2).

Possiamo anche considerare la composizione $g \circ f$, nell'ipotesi che $\mathrm{im}(f) \cap D_g \neq \emptyset$. In questo caso, il dominio di $g \circ f$ sarà $D_{g \circ f} = \{x \in D_f \ : \ f(x) \in D_g\}$. Osserviamo che, in generale,
$$f \circ g \neq g \circ f \text{ !!!!!}$$
come dimostra il prossimo esempio.

Esempio 2.6.3. 1. Consideriamo le funzioni
$$\begin{aligned} &g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad g(x) := x^2 - 1 \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}\,, \\ &f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \sqrt[4]{x} \ \ \forall\, x \in [0, +\infty)\,. \end{aligned}$$

[8] In questo contesto, g si chiama *funzione interna* e f *funzione esterna*.

Disegnando il grafico della parabola $y = x^2 - 1$, si vede subito che $\mathrm{im}(g) = [-1, +\infty)$. Allora $\mathrm{im}(g) \cap D_f = [0, +\infty)$ e quindi $f \circ g$ è ben definita sull'insieme $D_{f\circ g} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 \geq 0\} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$, e si ha

$$f(g(x)) = \sqrt[4]{x^2 - 1} \qquad \forall\, x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)\,.$$

D'altra parte, $\mathrm{im}(f) = [0, +\infty) \subset D_g$, quindi, ricordando l'Osservazione 2.6.2, si ha che $D_{g\circ f} = D_f = [0, +\infty)$, e

$$g(f(x)) = (\sqrt[4]{x})^2 - 1 = \sqrt{x} - 1 \qquad \forall\, x \in [0, +\infty)\,.$$

2. Consideriamo le funzioni

$$\begin{aligned} g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}\,, &\qquad g(x) := \sqrt{x} \;\; \forall\, x \in [0, +\infty)\,, \\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, &\qquad f(x) := -x^2 - 1 \;\; \forall\, x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Osserviamo che $\mathrm{im}(g) = [0, +\infty) \subset D_f$, quindi $D_{f\circ g} = D_g = [0, +\infty)$, e si ha

$$f(g(x)) = -(\sqrt{x})^2 - 1 = -x - 1 \qquad \forall\, x \in [0, +\infty)\,.$$

D'altra parte, $\mathrm{im}(f) = (-\infty, -1]$ ha intersezione vuota con D_g, quindi non è possibile considerare la composizione $g \circ f$!!!!

Funzioni inverse e composizione. Infine, sia $f : D_f \to \mathbb{R}$ una funzione iniettiva. Possiamo quindi considerarne l'inversa f^{-1}. Usando l'operazione di composizione fra funzioni, precisiamo le relazioni fra f e f^{-1}. Si ha

$$\begin{aligned} \forall\, y \in \mathrm{dom}(f^{-1}) &\qquad (f \circ f^{-1})(y) = y\,, \\ \forall\, x \in \mathrm{im}(f^{-1}) &\qquad (f^{-1} \circ f)(x) = x\,. \end{aligned} \tag{2.6.3}$$

Verifichiamo per esempio la seconda[9]: chiaramente, dato $x \in \mathrm{im}(f^{-1}) = \mathrm{dom}(f)$, $f(x) \in \mathrm{dom}(f^{-1}) = \mathrm{im}(f)$. Per definizione di f^{-1}, $f^{-1}(f(x)) = z$ se e solo se $f(z) = f(x)$. Poiché f è iniettiva, necessariamente $z = x$.

Esempio 2.6.4. Applicando (2.6.3) alla coppia $f(x) = e^x$ e $f^{-1}(x) = \ln(x)$, si trovano le relazioni

$$\begin{aligned} (\exp \circ \ln)(y) = \exp(\ln(y)) = y &\quad \forall\, y \in (0, +\infty), \\ (\ln \circ \exp) = \ln(\exp(x)) = x &\quad \forall\, x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Applichiamo la prima relazione e, anche usando le proprietà di logaritmi e potenze, troviamo che

$$x^x = (\exp \circ \ln)(x^x) = \exp(\ln(x^x)) = \exp(x \ln(x))$$

da cui si vede che

$$\text{il dominio naturale della funzione} \;\; x \mapsto x^x \;\; \text{è } (0, +\infty).$$

[9] **Esercizio!** verificare la prima.

Operazioni algebriche su funzioni.

Definizione 2.6.5. *Date $f : D_f \to \mathbb{R}$ e $g : D_g \to \mathbb{R}$, supponiamo che $D := D_f \cap D_g \neq \emptyset$; chiamiamo:*

- somma *di f e g la funzione $(f+g) : D \to \mathbb{R}$ definita da $(f+g)(x) := f(x)+g(x)$ per ogni $x \in D$;*
- prodotto *di f e g la funzione $f \cdot g : D \to \mathbb{R}$ definita da $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$ per ogni $x \in D$;*
- quoziente *di f e g la funzione $\frac{f}{g} : D \to \mathbb{R}$ definita da $\frac{f}{g}(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$ per ogni x appartenente all'insieme $D \setminus \{x \in D \ : \ g(x) = 0\}$.*

In particolare, data $f : D_f \to \mathbb{R}$, chiamiamo *funzione reciproco* di f il quoziente $\frac{1}{f}$, con dominio $D_f \setminus \{x \in D_f \ : \ f(x) = 0\}$.

Esempio 2.6.6. Consideriamo le funzioni

$$f(x) := \sqrt{x+1} \qquad \forall\, x \in D_f = [-1, +\infty)\,, \qquad\qquad g(x) := \frac{1}{x} \qquad \forall\, x \in D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}\,.$$

Allora $D = [-1, 0) \cup (0, +\infty)$, e

$$\forall\, x \in D \qquad (f+g)(x) = \sqrt{x+1} + \frac{1}{x}\,, \quad (f \cdot g)(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x}\,, \quad \frac{f}{g}(x) = x \cdot \sqrt{x+1}\,.$$

Si noti che, di fatto, il dominio naturale della funzione $\frac{f}{g}$ coincide con $D_f = [-1, +\infty)$.

Osservazione 2.6.7 (Relazione fra parità/disparità e operazioni sulle funzioni)**.** Siano f, g : $D \to \mathbb{R}$ due funzioni, e supponiamo che D sia simmetrico rispetto all'origine. Allora

- *se f e g sono entrambe pari, anche le funzioni $f+g$, $f \cdot g$, e f/g sono pari.* Verifichiamo per esempio che $f \cdot g$[10] sia pari: per ogni $x \in D$ si ha $(f \cdot g)(-x) = f(-x)g(-x) = f(x)g(x) = (f \cdot g)(x)$.
- *se f e g sono entrambe dispari, le funzioni $f \cdot g$ e f/g sono pari, mentre la funzione $f+g$ è dispari.* In effetti, per ogni $x \in D$ si ha $(f \cdot g)(-x) = f(-x)g(-x) = (-f(x))(-g(x)) = f(x)g(x) = (f \cdot g)(x)$, mentre $(f+g)(-x) = f(-x)+g(-x) = -f(x)-g(x) = -(f+g)(x)$.
- *se f è pari e g è dispari, le funzioni $f \cdot g$ e f/g sono dispari.* In effetti, per ogni $x \in D$ vale $(f \cdot g)(-x) = f(-x)g(-x) = f(x)(-g(x)) = -f(x)g(x) = -(f \cdot g)(x)$. Non si può concludere nulla sulla funzione somma $f + g$. Ad esempio, la funzione $x \mapsto x^2 + x^3$ non è né pari né dispari.

Ordinamento delle funzioni reali.

Definizione 2.6.8. *Consideriamo due funzioni $f : D_f \to \mathbb{R}$ e $g : D_g \to \mathbb{R}$. Supponiamo che $D := D_f \cap D_g \neq \emptyset$. Diciamo che*

- *$f \leq g$ se $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in D$;*

[10] si ragiona allo stesso modo per f/g.

- $f < g$ *se* $f(x) < g(x)$ *per ogni* $x \in D$.

Osserviamo che la relazione d'ordine così introdotta non è totale[11]: per esempio, considerate le funzioni $f(x) := x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $g(x) := 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, è falso sia che $f \leq g$ su $D = \mathbb{R}$, sia che $g \leq f$ su $D = \mathbb{R}$.

Traslazioni del grafico. Sia $f : D_f \to \mathbb{R}$ e sia $a > 0$. Introduciamo le seguenti traslate di f:

$$\begin{cases} g(x) := f(x-a) & \forall\, x \in D_g = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x - a \in D_f\}\,, \\ h(x) := f(x+a) & \forall\, x \in D_h = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x + a \in D_f\}\,, \\ k(x) := f(x) + a & \forall\, x \in D_k = D_f\,, \\ \ell(x) := f(x) + a & \forall\, x \in D_\ell = D_f\,. \end{cases}$$

Allora:

- il grafico di g si ottiene traslando orizzontalmente il grafico di f di a nella direzione positiva dell'asse delle x;
- il grafico di h si ottiene traslando orizzontalmente il grafico di f di a nella direzione negativa dell'asse delle x;
- il grafico di k si ottiene traslando verticalmente il grafico di f di a nella direzione positiva dell'asse delle y;
- il grafico di ℓ si ottiene traslando verticalmente il grafico di f di a nella direzione negativa dell'asse delle y.

[11]cioè non sempre due funzioni sono confrontabili