SECONDO FOGLIO DI ESERCIZI

(da consegnare entro il 21.10.2009)

Parità/Disparità. Dire se le seguenti funzioni sono: pari/dispari/nessuna delle due e giustificare la risposta:

$$1)\ x\cos(x);\quad 2)\ x+\cos(x);\quad 3)\ \sin(x^2);\quad 4)\ \frac{1+x^2}{2+x^4}\quad 5)\ \frac{x\sin(x)}{1+x^2};\quad 6)\ xe^x;\quad 7)\ \frac{x}{1+4x^4};\quad 8)\ x\frac{e^x+e^{-x}}{2}.$$

Periodicità. Dire se le seguenti funzioni sono periodiche:

$$\textbf{a)}\ \cos\left(\frac{x}{2}\right);\quad \textbf{b)}\ \sqrt[3]{\sin(x)};\quad \textbf{c)}\ \sin(3x);\quad \textbf{d)}\ \cos\left(\frac{x}{3}\right).$$

Traslazioni di grafici. Usando le regole per la traslazione dei grafici, tracciare il grafico qualitativo delle seguenti funzioni:

$$f_1(x) = |x-4|-2,\qquad f_2(x) = \arctan(x)-1,\qquad f_3(x) = \ln(x+1),\qquad f_4(x) = \sqrt[4]{x-2}-1,$$

$$f(x) := \begin{cases} |x-5|+1, & x>0; \\ 6, & x=0; \\ \arctan(x)+5, & x<0. \end{cases}\qquad g(x) := \begin{cases} \sqrt[4]{x-3}+2, & x>3; \\ \frac{1}{2}, & x=3; \\ x, & 0<x<3; \\ e^{-x}-1, & x<0. \end{cases}$$

$$h(x) := \begin{cases} \ln(x+4), & x>-3; \\ \arctan(x+3), & x\le -3. \end{cases}$$

Per ciascuna di queste funzioni, osservando il grafico dire

- quale è l'insieme immagine? La funzione è suriettiva (cioè ha come insieme immagine tutto $\mathbb{R}$)?
- La funzione è iniettiva?

Composizione di funzioni.

1. Si considerino le seguenti coppie di funzioni f e g

   (a)
   $$f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}\quad f(x) := \sqrt[4]{x},\ x\ge 0;\qquad g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\quad g(x) := x^2-1,\ x\in\mathbb{R}.$$

   (b)
   $$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\quad f(x) := -x^2-1,\ x\in\mathbb{R};\qquad g:[0,+\infty)\to\mathbb{R}\quad g(x) := \sqrt{x},\ x\ge 0.$$

   Per ognuna di queste due coppie, si dica se è possibile definire la funzione composta $f\circ g$, e, in caso affermativo, si dica quale è il suo dominio, e si indichi l'espressione analitica di $f\circ g$; inoltre, si dica se è possibile definire la funzione composta $g\circ f$, e, in caso affermativo, si dica quale è il suo dominio, e si indichi l'espressione analitica di $g\circ f$.

2. Date le funzioni
   $$f(x) = e^x\quad \forall\, x\in\mathbb{R},\qquad g(x) = \sqrt{6+5x-x^2}\quad \forall\, x\in D_g,$$
   (con D_g il domini naturale di g), si dica se è possibile definire la funzione composta $f\circ g$, e, in caso affermativo, se ne indichi il dominio e l'espressione analitica.

3. Date le funzioni
   $$f(x) = x^3-x\quad \forall\, x\in\mathbb{R},\qquad g(x) = \ln(x)\quad \forall\, x\in(0,+\infty),\qquad h(x) = -\frac{(x^2-1)^2}{4}\quad \forall\, x\in\mathbb{R},$$
   si dica se è possibile definire le funzioni composte:
   $$h\circ g\circ f,\quad h\circ f\circ g,\quad f\circ h\circ g,\quad g\circ f\circ h,\quad g\circ h\circ f,$$
   e, in caso affermativo, per ognuna di esse si indichi il dominio e l'espressione analitica.

Determinazione del dominio di definizione. Determinare il dominio naturale di definizione delle seguenti funzioni:

$$f_1(x) = \frac{2x^4 + 3x^3 - 3x}{9x^3 - 2x^2}, \qquad f_2(x) = \frac{x^5 - 3x^2}{2x^4 + x^3} + \frac{\sin(5x)}{x}$$

$$f_3(x) = \frac{\arctan(3x^4)}{x^2} + \frac{x^3 - \frac{\cos(5x)}{x}}{x^2}, \qquad f_4(x) = \arctan\left(\sqrt[4]{\ln(x^2 - 3)}\right)$$

$$f_5(x) = \frac{1}{\arctan(x^2 - 3x)}, \qquad f_6(x) = \arcsin(|x - 5|)$$

$$f_7(x) = \arccos(|x - 2|), \qquad f_8(x) = \arctan\left(x^2 + 4 - 4x\right)$$

$$f_9(x) = \frac{e^{1/x^3}}{x^3 + 4x}$$

$$f_{10}(x) = e^{1/\sin(x)}$$

$$f_{11}(x) = \arcsin\left(\frac{x^2}{x^2 + 1}\right)$$

$$f_{12}(x) = \log_3(x^2 - 5x)$$

$$f_{13}(x) = \frac{\ln(1 + x^2)}{x\sin(x)}$$

Studio del segno di funzioni. Studiare il segno delle funzioni $f_4, \ldots, f_{13}$ dell'esercizio precedente, cioè per ogni funzione f_i, $i = 4, \ldots 13$, determinare gli insiemi (eventualmente vuoti)

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_+ &= \{x \in \mathrm{dom}_{f_i} \;:\; f_i(x) > 0\}\,, \\ \mathcal{S}_0 &= \{x \in \mathrm{dom}_{f_i} \;:\; f_i(x) = 0\}\,, \\ \mathcal{S}_- &= \{x \in \mathrm{dom}_{f_i} \;:\; f_i(x) < 0\}\,. \end{aligned}$$

Proprietà delle funzioni logaritmiche. Determinare il dominio delle seguenti funzioni e, usando le proprietà dei logaritmi, semplificarne l'espressione analitica:

$$f_1(x) = \ln\left(x^2 - 3x - 18\right)$$

[Suggerimento: scrivere $(x^2 - 3x - 18) = (x - a)(x - b)$ e usare la proprietà del logaritmo del prodotto di due fattori]

$$f_2(x) = \log\left(\frac{x^2 + 3x + 4}{x^2 - 3x - 10}\right)$$

$$f_3(x) = \log_2\left(x^2 - 4x + 4\right)$$

[Suggerimento: osservare che l'argomento di $\log_2$ è un quadrato..]

$$f_4(x) = \log_5\left(\arctan^2(x^3 - x)\right) = \log_5\left(\left[\arctan(x^3 - x)\right]^2\right)$$

$$f_5(x) = \log_2(e)\ln(x^4 - 5x)$$

$$f_6(x) = \ln(\exp(\cos(x)))$$

[Suggerimento: ricordare che ln è l'inversa di exp..]