Esercizi sulle serie numeriche a termini positivi

Riccarda Rossi

Università di Brescia

Analisi I

Useremo i criteri per le serie a termini positivi.
Quando sarà evidente, ometteremo il controllo della positività della successione

ES. 9 Studiare il carattere di $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+3}}{e^{2n}}$

Si tratta della serie

$$2^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{e^{2n}} = 2^3 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{e^2}\right)^n$$ che è una

serie geometrica di ragione $q = \frac{2}{e^2} < 1$ - CONVERGE

ES. 10 : visto a lezione

ES. 11

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2-2n+1}{\sqrt[3]{n^4+7}}$$

NB: $n^2-2n+1 = (n-1)^2$

Si tratta della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n-1)^2}{(n^4+7)^{1/3}}$

che è a termini positivi.

Posso usare il criterio del confronto asintotico:

$$\frac{(n-1)^2}{(n^4+7)^{1/3}} \sim \frac{n^2}{n^{4/3}} \quad \left(\text{infatti } \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n-1)^2}{(n^4+7)^{1/3}}}{\frac{n^2}{n^{4/3}}} = 1\right)$$

Quindi la serie ha lo stesso carattere di

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^{4/3}} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{2/3} \quad \text{che diverge}$$

$$\left(\lim_{n \to \infty} n^{2/3} = +\infty \right)$$

ES. 12

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n)}{n^4}$$

è una serie vista a lezione (controllare!)

CONVERGE

ES. 13

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{5n+4^n}{\log(n)+5^n}$$

Osservo che

$$\lim_{n\to+\infty} \underbrace{\frac{5n+4^n}{\log(n)+5^n}}_{a_n:} = \lim_{n\to+\infty} \frac{4^n\left(\frac{5}{4^n}+1\right)}{5^n\left(\frac{\log(n)}{5^n}+1\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n$$

Quindi $a_n \sim \left(\frac{4}{5}\right)^n$

e $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n$ è serie geometrica di ragione $q = \frac{4}{5} < 1$

$\rightarrow$ CONVERGE

ES. 14

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(2+\sin(n))}{n^{5/3}}$$

N.B. È una serie a termini positivi perché $2+\sin(n) \geq 2-1 = 1$

Uso il criterio del confronto:

$$\frac{(n+1)(2+\sin(n))}{n^{5/3}} \geq \frac{n+1}{n^{5/3}} = \frac{n}{n^{5/3}} + \frac{1}{n^{5/3}}$$

$$= \frac{1}{n^{2/3}} + \frac{1}{n^{5/3}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^{2/3}} + \frac{1}{n^{5/3}} \right) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2/3}}}_{\text{Diverge}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/3}}}_{\text{Converge}}$$

Quindi questa serie DIVERGE.

E quindi diverge anche la serie dell'esercizio.

ES. 15

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{e^{2n}+2n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{e^{2n}+2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{e^{2n}\left(1+\frac{2n}{e^{2n}}\right)} =$$

$\frac{2n}{e^{2n}} \to 0$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n$$

Quindi $\frac{e^n}{e^{2n}+2n} \sim \left(\frac{1}{e}\right)^n$ e quindi

la serie associata ha lo stesso carattere di $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^{n}$, serie geometrica di ragione $q=\frac{1}{e}<1$

$\longrightarrow$ CONVERGENTE

ES. 16

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$$

Poiché compare una potenza con esponente "n", conviene usare il criterio asintotico della radice

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$= \frac{n+1}{n+1} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \exp\left(n \log\left(\frac{n}{n+1}\right)\right) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \exp\left(n \log\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\right) =$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\log(1+t)}{t} = 1$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \exp\left(\underbrace{n \cdot \left(-\frac{1}{n+1}\right)}_{\to -1}\right) = e^{-1} < 1$$

Quindi la serie CONVERGE.

ES. 17 [Assegnato]

La serie diverge: confrontare con la serie armonica.

ES. 18 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(n^4)-\sqrt{n}}{\sqrt{n+\log(n)}\,\log(n!+n^n)}$

è una serie a termini negativi: infatti $\cos(n^4) \leq 1 \leq \sqrt{n}$ $\forall n \geq 2$, quindi il numeratore è negativo, mentre il denominatore è positivo $\forall n \geq 2$.

Studio la serie dei moduli, che è

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n} - \cos(n^4)}{\sqrt{n + \log(n)}\,\log(n! + n^n)} = a_n$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\left(1 - \frac{\cos(n^4)}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n}\left(1 + \frac{\log(n)}{\sqrt{n}}\right) \log\left(n^n\left(\frac{n!}{n^n} + 1\right)\right)}$$

$\to 0$ $\qquad \to 0$ $\qquad \to 0$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}\,\log(n^n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\log(n^n)}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n\log(n)}$$

Quindi $a_n \sim \dfrac{1}{n\log(n)}$ e $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log(n)}$ DIVERGE

$\Rightarrow$ Diverge anche $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} a_n$.

ES. 19 $$\sum_{n=0}^{\infty} \log\left(\frac{n+3}{n^3+n^2+4}\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+3}{n^3+n^2+4} = 0$$

Quindi $\log\left(\dfrac{n+3}{n^3+n^2+4}\right) \to -\infty$ - non è verificata la condizione necessaria. La serie (che è a termini negativi) Diverge (a $-\infty$)

ES. 20 (Assegnato $\longrightarrow$ la serie diverge)

ES. 21 $$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} \left[\frac{n}{2}\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)\right]^{n}} =: a_n$$

N.B. Osservare che la serie è a termini positivi.
Uso il criterio della radice.

$$\lim_{n\to+\infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n} \left[\frac{n}{2}\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)\right]^{1}$$

Abbiamo visto che $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n} \to e^{-1}$

Ricordo il limite notevole $\lim_{t\to 0} \frac{e^t-1}{t} = 1$

Quindi $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2} \cdot \left(e^{\frac{1}{n}}-1\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{2}$

e quindi $\lim_{n\to+\infty} a_n^{1/n} = \frac{e^{-1}}{2} < 1$.

$\Rightarrow$ la serie converge.

ES. 22 $\quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ con $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & n \leq 100 \\ \frac{1}{n^2} & n \geq 101 \end{cases}$

Per lo studio del carattere della serie, conta solo il comportamento definitivo della successione $\{a_n\}$ -

Quindi trascuriamo quello che accade per $n \leq 100$. La serie ha lo stesso carattere di $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ - CONVERGENTE -

---

ES. 23 Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{e^{6n\alpha}}$$

<u>NB</u> $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, la serie è a termini positivi

Verifico la condizione necessaria

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{e^{6n\alpha}} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha<0 \\ +\infty & \text{se } \alpha=0 \\ 0 & \text{se } \alpha>0 \end{cases}$$

Per $\alpha \le 0$, la serie diverge a $+\infty$

Per $\alpha>0$, uso il criterio asintotico della radice

$$\lim_{n\to+\infty} (a_n)^{1/n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n^2)^{\frac{1}{n}}}{e^{6\alpha}} = \frac{1}{e^{6\alpha}} < 1$$ ↳ perché $\alpha>0$

ora $(n^2)^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{1}{n}\log(n^2)\right) = \exp\left(\frac{2}{n}\log(n)\right) \to e^0 = 1$

Quindi ho convergenza della serie per ogni $\alpha>0$

Es. 24

$$\sup\left\{ \alpha \geq 0 \;\middle|\; \sum_{n=1}^{\infty} n!\left(\frac{\alpha}{n}\right)^n \text{ converge} \right\}$$

Serie a termini positivi. Uso il criterio asintotico del rapporto

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{(n+1)!}^{\,(n+1)} \left(\frac{\alpha}{n+1}\right)^{n+1}}{\cancel{n!}\left(\frac{\alpha}{n}\right)^n} =$$

$$\left(\frac{\alpha}{n+1}\right)^n \cdot \frac{\alpha}{n+1} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} (n+1) \cdot \left(\frac{\frac{\cancel{\alpha}}{n+1}}{\frac{\cancel{\alpha}}{n}} \right)^n \cdot \left(\frac{\alpha}{n+1} \right)^1$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \cancel{(n+1)} \cdot \left(\frac{\alpha}{\cancel{n+1}} \right) \cdot \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \to e^{-1}$$

$$= \alpha e^{-1}$$

<u>Ora</u>: Se $\alpha e^{-1} < 1$, cioè se $\alpha < e$, la serie converge.

Se $\alpha e^{-1} > 1$, cioè $\alpha > e$, la serie diverge.

Se $\alpha e^{-1} = 1$, il criterio è inefficace e la serie va studiata in altro modo.

In ogni caso, il sup. degli α per cui la serie converge è e.

ES. 25

$$\inf\left\{\alpha\in\mathbb{R} \;\middle|\; \sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{n^2+\sin(n)}{n^\alpha\log(n)}\right)^{1/2} \text{ converge}\right\}$$

N.B. $\forall\alpha\in\mathbb{R}$ la serie è a termini positivi (verificare)

Osservo $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2+\sin(n)}{n^\alpha \log(n)}\right)^{1/2}$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n^2\left(1+\frac{\sin(n)}{n^2}\right)}{n^\alpha \log(n)}\right)^{1/2}$$

$\frac{\sin(n)}{n^2} \to 0$

Quindi $a_n \sim \dfrac{1}{n^{\frac{\alpha-2}{2}} \log(n)^{\frac{1}{2}}}$

e osservo che $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{\alpha-2}{2}} (\log(n))^{1/2}}$ converge

se e solo se $\dfrac{\alpha-2}{2} > 1$ cioè $\alpha > 4$

Quindi $\inf\{\alpha \mid \sum a_n \text{ converge}\} = 4$

ES. 26 Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\underbrace{\frac{e^{\alpha n}}{n^2}}_{a_n} + \underbrace{\frac{1}{n^{\alpha+3} \log(n)}}_{b_n} \right)$$

Le 2 successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono positive.
La serie converge se e solo convergono
$\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=2}^{\infty} b_n$.

- $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{\alpha n}}{n^2}$ converge se e solo se $\alpha \leq 0$.

Per es. con il criterio asintotico della radice

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{e^{\alpha n}}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\alpha}}{n^{\frac{2}{n}}} = e^{\alpha} < 1 \iff \alpha < 0$$

E per $\alpha = 0$ la serie si riduce a $\sum \frac{1}{n^2} \to$ CONV.

- $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha+3}\log(n)}$ converge se e solo se $\alpha+3 > 1$ cioè $\alpha > -2$

Quindi la serie converge $\iff$ $-2 < \alpha \leq 0$

ES. 27

Per quali $b \in \mathbb{R}$ converge

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cosh(bn)}{2^n}$$

Ricordo che $\cosh(bn) = \dfrac{e^{bn} + e^{-bn}}{2}$

Quindi $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{bn}}{2^n} + \frac{e^{-bn}}{2^n} =$

$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e^{b}}{2}\right)^n + \left(\frac{e^{-b}}{2}\right)^n\right]$$

la serie converge se e solo se convergono entrambe le serie addende.

- $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e^b}{2}\right)^n$ è serie geometrica di ragione $q = \frac{e^b}{2}$

Converge se e solo se $q < 1$, cioè

$\frac{e^b}{2} < 1 \iff b < \log(2)$

- $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e^{-b}}{2}\right)^n$ è di ragione $q = \frac{e^{-b}}{2}$

Converge se e solo se $q < 1$ cioè $e^{-b} < 2$ cioè $-b < \log(2) \iff b > -\log(2)$

Quindi si ha convergenza se e solo se

$$\boxed{-\log(2) < b < \log(2)}$$

ES. 28 Sia $\{a_n\}$ una successione a termini positivi tale che

1) $\lim_{n\to+\infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} = L$

2) $\sum a_n$ diverge

3) $\sum a_n^2$ converge.

Allora: a) $0 \leq L < 1$ b) $L > 1$ c) $L = 1$

- Vedremo subito che a) e b) sono false: la successione $a_n = \frac{1}{n}$ è tale che

$$\sum \frac{1}{n} = +\infty, \quad \sum \frac{1}{n^2} < +\infty, \text{ e } \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = 1$$

- Perché, in generale, deve essere $L = 1$?

È sufficiente osservare che

$$(a_n)^{1/n} = \exp\left(\frac{1}{n}\log(a_n)\right) \; .$$

Perché $\sum a_n^2$ converge, si ha $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ e quindi $\log(a_n) \to -\infty$

Per la f.i. $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(a_n)}{n}$ ci sono 3 possibilità:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(a_n)}{n} = -\infty \iff L = L' = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(a_n)}{n} = 0 \iff L = L' = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(a_n)}{a_n} = c < 0 \iff L<1 \text{ e } L'<1$$

Quindi $L>1$ è sempre escluso. Se fosse $L<1$, allora $\sum a_n$ convergerebbe. FALSO. Quindi $L=1$

ES. 29 Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n+1)^\alpha}{n(n-1)}$$

Serie a termini positivi

Verifico condizione necessaria:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{(n+1)^\alpha}{n(n-1)} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^\alpha \left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha}{n^2 \left(1-\frac{1}{n}\right)} =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} n^{\alpha-2} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha}{1-\frac{1}{n}} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 2 \\ 1 & \text{se } \alpha = 2 \\ 0 & \text{se } \alpha < 2 \end{cases}$$

Quindi studio convergenza solo per $\alpha < 2$

(Per $\alpha \geq 2$ ho divergenza a $+\infty$).

Uso il criterio del confronto

$$a_n \sim n^{\alpha-2} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha}{1-\frac{1}{n}} \sim n^{\alpha-2}$$

e $\sum n^{\alpha-2} = \sum \frac{1}{n^{2-\alpha}}$ converge se e solo se $2-\alpha > 1$, cioè

$\alpha < 1$

ES. 30 Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2+\alpha}{1-\alpha}\right)^n$$

N.B.: $\alpha \neq 1$

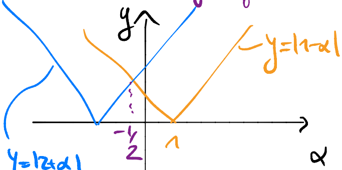
È serie geometrica di ragione $q = \frac{2+\alpha}{1-\alpha}$

Si ha convergenza $\Leftrightarrow$ $|q| < 1$ $\Longleftrightarrow$

$$\frac{|2+\alpha|}{|1-\alpha|} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |2+\alpha| < |1-\alpha|$$

RISOLUZIONE ALGEBRICA $\Longleftrightarrow$
$$\begin{cases} 2+\alpha < |1-\alpha| \\ 2+\alpha > -|1-\alpha| \end{cases}$$

RISOLUZIONE grafica



$|2+\alpha| < |1-\alpha| \Leftrightarrow$ $\alpha < -\frac{1}{2}$

ora $2+\alpha < |1-\alpha| \iff 1-\alpha > 2+\alpha$ o $1-\alpha < -(2+\alpha)$

$\iff$

$2\alpha < -1$ o $\cancel{1-\alpha < -2-\alpha}$

No.

$\iff$

$\alpha < -1/2$

mentre

$2+\alpha > -|1-\alpha| \iff |1-\alpha| < -(2+\alpha)$

$\iff 2+\alpha < 1-\alpha < -(2+\alpha)$

$$\iff \begin{cases} 1-\alpha < -2-\alpha \\ 1-\alpha > 2+\alpha \end{cases}$$

$\iff 2\alpha < -1 \iff \alpha < -1/2$

Quindi $|q|<1 \iff \alpha < 1/2$

e per questi valori si ha converg delle serie