Esercizi sui numeri complessi

ES. 1 del Tema d'Esame del 01/04/2015

Trovare il luogo degli $z \in \mathbb{C}$:

$$(1) \quad \left(|Re(z)| + 3\,|Im(z)|\right)\left(z\cdot\bar{z} - (Re(z))^2 - i\,e^{\frac{3}{2}\pi i} - \frac{z+\bar{z}}{2}\right) = 0$$

Se $z = x+iy$, allora: $|Re(z)| = |x|$, $|Im(z)| = |y|$

$$z\cdot\bar{z} = x^2+y^2 \qquad z+\bar{z} = 2x$$

inoltre $i\,e^{\frac{3}{2}\pi i} = i\left(\cos(\tfrac{3}{2}\pi) + i\sin(\tfrac{3}{2}\pi)\right) = i(-i) = -i^2 = +1$

Quindi (1) diventa

$$(|x|+3|y|)\cdot\left(x^2+y^2 - x^2 - 1 - \frac{2x}{2}\right) = 0,$$ cioè

$$(|x|+3|y|)\cdot(y^2-1-x)=0$$

$\underbrace{|x|+3|y|=0}_{1}$ o $\underbrace{x=y^2-1}_{2}$

N.B: "o" significa che sto facendo l'unione fra il luogo geometrico dato da 1 e quello dato da 2

N.B. Siccome $|x|, |y| \geq 0$,

$|x|+3|y|=0 \iff |x|=0$ e $|y|=0$

$\iff x=0$ e $y=0 \iff (x,y)=(0,0)$

↳ un punto

$x=y^2-1$ è una parabola.

Allora, la soluzione è: UNIONE DI UN PUNTO E DI UNA PARABOLA.

Risposta $\boxed{C}$

Es. 1 del T.E. del 14/01/2016

Trovare le soluzioni in $\mathbb{C}$ di

$$\frac{1}{4} z^5 + z^3 + 2i z^2 + 2^3 i = 0.$$

L'equazione si riscrive come

$$z^5 + 4z^3 + 8i z^2 + 32i = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$z^3(z^2+4) + 8i(z^2+4) = 0. \iff (z^3+8i)(z^2+4) = 0$$

$$\iff \begin{array}{l} z^3 = -8i \\ z^2 = -4 \end{array}$$

le soluzioni sono le radici terze di $-8i$ e le radici seconde di -4.

$$z_{3,4} = \pm 2i$$

z_0, z_1, z_2 date dalla formula $z_k = 2\exp\left(i \cdot \frac{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi}{3}\right)$

per $k \in \{0,1,2\}$.

(N.B. ho usato che $-8i$ si scrive, in forma esponenziale, come $-8i = 8\cdot(-i) = 8\exp\left(i\cdot\frac{3}{2}\pi\right)$)

e quindi $z_0 = 2\exp(i\cdot\pi/2) = 2i$

$k=1 \Rightarrow z_1 = 2\exp\left(i\cdot\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2}{3}\pi\right)\right)$

$$= 2\exp\left(i\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)\right) =$$

$$= 2\left(\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$= 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i/2\right)$$

$k=2 \Rightarrow z_2 = 2\exp\left(i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{4}{3}\pi\right)\right) = 2\exp\left(i\cdot\frac{11}{6}\pi\right)$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)$$

la risposta è $\boxed{A}$

Tema d' ESAME del 02/02/2015

ES. 1

Trovare le radici cubiche di

$$z = \frac{e^{4i\pi}(1+i)^{30}}{(1-i)^{20}}$$

Scrivo z in forma esponenziale. – Analizzo i fattori separatamente

$$e^{4i\pi} = \cos(4\pi) + i\sin(4\pi) = 1$$

$$(1+i)^{30} = \left(\sqrt{2}\exp\left(i\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right)^{30} = \left(\sqrt{2}\right)^{30}\exp\left(i\cdot\frac{30\pi}{4}\right)$$

$$= \left(\sqrt{2}\right)^{30}\exp\left(i\cdot\frac{15}{2}\pi\right)$$

$$= (\sqrt{2})^{30} \exp\left(i \cdot \left[\frac{12}{2}\pi + \frac{3}{2}\pi\right]\right)$$

$$= (\sqrt{2})^{30} \exp\left(i \cdot \tfrac{3}{2}\pi\right)$$

$$(1-i)^{20} = \left(\sqrt{2}\, \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right)\right)^{20}$$

$$= (\sqrt{2})^{20} \exp(-i\, 5\pi)$$

$$\rightarrow \quad z = \frac{(\sqrt{2})^{30} \exp\left(i \cdot \frac{3}{2}\pi\right)}{(\sqrt{2})^{20} \exp(-i\, 5\pi)} = (\sqrt{2})^{10} \exp\left(i \cdot \left(5\pi + \frac{3}{2}\pi\right)\right)$$

$$= (\sqrt{2})^{10} \exp\left(i \cdot \frac{13}{2}\pi\right)$$

uso che

$$\frac{13}{2}\pi = 6\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$= (\sqrt{2})^{10} \exp\left(i \cdot \pi/2\right)$$

$$= 2^5 i$$

$$= \boxed{2^5 \exp\left(i \cdot \pi/2\right)}$$

Ora uso la forma esponenziale di z per trovarne le radici cubiche

$$z_k = 2^{5/3} \exp\left(i \, \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right) \quad k \in \{0,1,2\}.$$

da cui

$$z_0 = 2^{5/3} \exp\left(i \cdot \pi/6\right)$$

$$z_1 = 2^{5/3} \exp\left(i \cdot \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi\right)\right)$$

$$= 2^{5/3} \exp\left(i \cdot \frac{5}{6}\pi\right)$$

$$z_2 = 2^{5/3} \exp\left(i \left(\frac{\pi}{6} + \frac{4}{3}\pi\right)\right) =$$

$$= 2^{5/3} \exp\left(i \, 3/2 \, \pi\right) = -2^{5/3} i$$

Risposta $\boxed{C}$

ES. 1 del T.E. del 12/01/2015

Il numero complesso z tale che

$$|z| = 7 \qquad \text{e} \qquad \underbrace{\frac{z(1+i)}{(|z|^2+|z|+1)} \in \mathbb{R}^+}_{(*)}$$

è dato da . . .

N.B. Perché $|z|=7$, z non può essere 0.

Scrivo z in forma algebrica $z = x+iy$ — Quindi la condizione $(*)$ diventa, tenendo conto del fatto che

$|z|=7$,

$$\frac{(x+iy)(1+i)}{49+7+1} \in \mathbb{R}^+$$

da cui

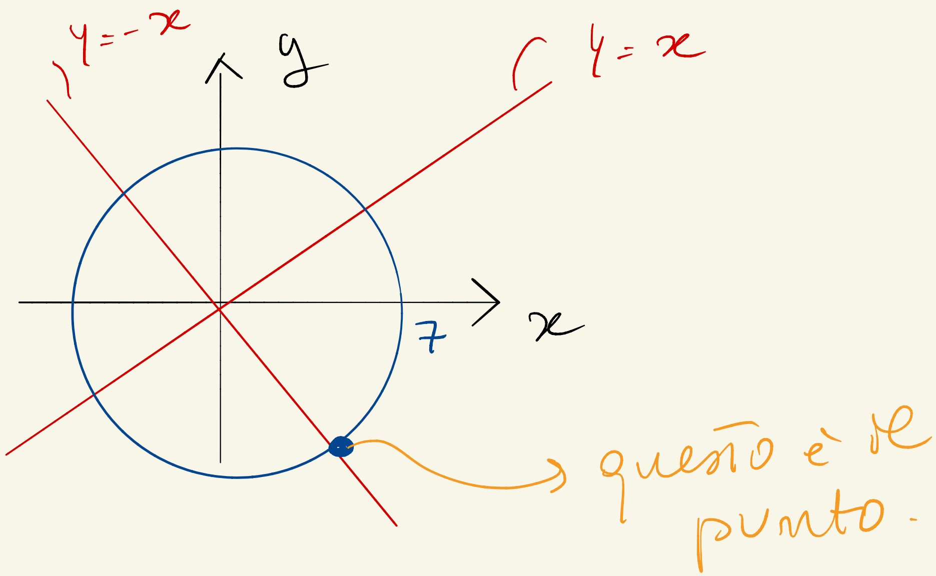
$$\frac{x+ix+iy-y}{57} \in \mathbb{R}^+$$

$$\iff \frac{(x-y)+i(x+y)}{57} \in \mathbb{R}^+$$

da cui $\quad x+y=0.$ $\to$ il punto (x,y) sta sulla retta $y=-x$ e sotto la retta $y=x$

$\qquad\qquad x-y>0$

e da $|z|=7$ deduco che giace sulla circonf. di centro $(0,0)$ e raggio 7



$z = 7\exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right)$

RISPOSTA $\boxed{C}$

ES. 2 del T.E. del 10/11/2014

(prima prova intermedia A.A. 2014/15)

Trovare le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione

$$\left(z^3 + 3\exp\left(i \cdot \frac{\pi}{2}\right)\right) \cdot \frac{z-\bar{z}}{i|z|} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(z^3 + 3i\right) \cdot \frac{z-\bar{z}}{i|z|} = 0$$

N.B. z deve essere diverso da 0. Quindi ottengo

$(z^3+3i)(z-\bar{z})=0$ da cui

$z^3 = -3i$ o $z = \bar{z}$

↓ unione

$z^3 = -3i$ dà le 3 radici cubiche di $-3i$ → Es. calcolarle

(sono 3 punti)

$z = \bar{z}$ → i complessi che coincidono con il proprio coniugato sono tutti e soli i numeri reali

↓

asse x

Ma $z \neq 0$ → $\underbrace{\text{asse x, privato dell'origine}}$

= 2 semirette

Quindi ho l'unione di 2 semirette e 3 punti

risposta $\boxed{B}$

T.E. del 02/02/2018 - ESERCIZIO 1

Calcolare $$z = \left(\frac{\sqrt{3} + i}{1 - i\sqrt{3}} \right)^{22}$$

Scrivo il numero $\dfrac{\sqrt{3}+i}{1-i\sqrt{3}}$ in forma esponenziale

$$|\sqrt{3} + i| = \sqrt{4} = 2$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} + i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right) = 2\exp\left(i \cdot \frac{\pi}{6}\right)$$

$$1 - i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2\exp\left(i \cdot \frac{5}{3}\pi\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sqrt{3}+i}{1-i\sqrt{3}} = \frac{2\exp\left(i\cdot\frac{\pi}{6}\right)}{2\exp\left(i\,\frac{5}{3}\,\pi\right)} =$$

$$= \exp\left(i\cdot\left(-\frac{9}{6}\,\pi\right)\right)$$

$$= \exp\left(-i\,\frac{3}{2}\,\pi\right)$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i\sqrt{3}}\right)^{22} = \left(\exp\left(-i\,\frac{3}{2}\,\pi\right)\right)^{22}$$

$$= e^{-33i\pi} = e^{(-34i\pi+i\pi)}$$

$$= e^{i\pi}$$

Risposta: $\boxed{D}$

Tema d'Esame del 10/11/2016

(prima prova intermedia A.A. 2016/17)

ES. 1

$$0 = \underbrace{\left(\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{38} \frac{z\cdot\bar{z}}{(1+i)^2} + 2\,\frac{Re\,(z+2\bar{z})}{e^{3\pi i}}\right)}_{1^\circ \text{ fattore}} \cdot \underbrace{\left(3\,Re\,(iz) + \left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2\right)}_{2^\circ \text{ fattore}}$$

2° fattore $\quad z = x+iy \rightarrow iz = ix + i^2 y = -y + ix$

$$Re\,(iz) = -y$$

$$\frac{z+\bar{z}}{2} = \frac{x+iy+x-iy}{2} = x$$

2° fattore $=0 \iff (-3y+x^2) = 0 \iff y = \frac{x^2}{3}$ parabola

1° fattore :
$$\frac{1-i}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}} = \exp\left(-i\cdot\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{38} = \left(e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^{38} = \exp\left(-i\left(\frac{36}{4}\pi+\frac{2}{4}\pi\right)\right)$$

$$= \exp\left(-i\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{3}{2}\pi i} = -i$$

$$z\cdot\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2+y^2$$

$$(1+i)^2 = \left(\sqrt{2}\exp\left(i\frac{\pi}{4}\right)\right)^2 = 2e^{i\pi/2} = 2i$$

$$\mathrm{Re}\,(z+2\bar{z}) = \mathrm{Re}\,(x+iy+2x-2iy) = \mathrm{Re}\,(3x-iy) = 3x$$

$$e^{3\pi i} = e^{\pi i} = -1$$

Quindi il 1° fattore $=0 \iff$

$$\left(-i\cdot\frac{x^2+y^2}{2i} + \frac{2\cdot 3x}{-1}\right) = 0$$

$$\iff \left(-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}-6x\right) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad x^2+y^2-12x=0$$

$$\Longleftrightarrow \quad x^2-12x+36+y^2=36$$

$$\Downarrow$$

$$(x-6)^2+y^2=36$$

circonferenza di raggio 6.

La risposta è $\boxed{B}$