

Analisi Matematica I

06.09.2022

Tempo a disposizione: 90 minuti

Esercizio 1. Rappresentare in forma esponenziale tutti i numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$z^3 = |1 - i| [1 - i]^4 + 2(1 + i)^2$$

[Punteggio: 5 punti]

Esercizio 2. Calcolare il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)! \frac{\left(1 + \arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n}{\left(1 - \exp\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) (n+3)!}$$

[Punteggio: 5 punti]

Esercizio 3. Determinare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha \left[1 + \sin\left(\frac{1}{n}\right) - \sqrt{1 + \frac{2}{n}}\right]$$

Suggerimento: moltiplicare e dividere per la quantità $(1 + \sin(\cdot) + \sqrt{\cdot})$

[Punteggio: 6 punti]

Esercizio 4. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\arctan(2-x)}{x-2} & \text{se } x > 2 \\ 1 & \text{se } x = 2 \\ \sin\left(\frac{1}{(x-2)^2}\right) & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

Classificare il punto di discontinuità $x_0 = 2$.

[Punteggio: 5 punti]

Esercizio 5. Calcolare l'integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^3 x - \sin^3 x) dx$$

[Punteggio: 6 punti]

Esercizio 6. Sia \tilde{y} la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - y = e^x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \tilde{y}(x).$$

[Punteggio: 5 punti]

Punteggio di ammissione alla prova di teoria: si è ammessi alla prova di teoria solo con un punteggio maggiore o uguale a **16**.