

Analisi Matematica I

12.07.2023

Tempo a disposizione: 90 minuti

Esercizio 1. Determinare l'insieme degli $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\operatorname{Re}(1+i(z\bar{z})^5) < \operatorname{Im}\left(\frac{z}{z+i} + 7\right).$$

[Punteggio: 5 punti]

Esercizio 2. Calcolare il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{n+2} + n!}{(n+1)^n} \left(\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) + \cos\left(\frac{1}{n}\right) - \exp(n^{-3}) \right).$$

[Punteggio: 5 punti]

Esercizio 3. Determinare tutti e soli i valori di $\alpha > 0$ per cui la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+n^\alpha) - \alpha \log n}{\sqrt{1+n^4} - n^2}$$

converge.

[Punteggio: 6 punti]

Esercizio 4. Determinare per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x(1+x+x^2)^{\frac{\alpha}{x}} & \text{se } x > 0 \\ \sin(x^2) + \sin(2x) & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

è derivabile in $x = 0$.

[Punteggio: 5 punti]

Esercizio 5. Calcolare l'integrale

$$\int_0^{\pi^2} \sin(\sqrt{x}) dx.$$

[Punteggio: 6 punti]

Esercizio 6. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(x) + x^2 \cos(x)u(x) = \exp(2 \sin(x) - 2x \cos(x) - x^2 \sin(x) + 3x) \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

[Punteggio: 5 punti]

Punteggio di ammissione alla prova di teoria: si è ammessi alla prova di teoria solo con un punteggio maggiore o uguale a 16.