

# Analisi Matematica I – Scritto del 12.07.2021

Tempo a disposizione: 75 minuti

**Esercizio 1.** Determinare e rappresentare graficamente il luogo dei punti  $z \in \mathbb{C}$  tali che

$$z(\bar{z} + 4i) - 4z = 0.$$

[Punteggio: 5 punti]

**Esercizio 2.** Determinare per quali valori del parametro  $\beta \in \mathbb{R}$  si ha convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1-4\beta}}{\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) + \frac{1}{n^3}} \left(\frac{n+4+\arctan(n)}{n}\right)^n$$

[Punteggio: 6 punti]

**Esercizio 3.** Calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log\left(e^{x^4} - x^2 + (\sin x)^2\right)}{x^4}.$$

[Punteggio: 5 punti]

**Esercizio 4.** Determinare e classificare gli eventuali punti di discontinuità e di non derivabilità della funzione  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$f(x) := \begin{cases} \log(1+4x) & \text{se } x \geq 0 \\ |1+4x| - 1 & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

[Punteggio: 5 punti]

**Esercizio 5.** Determinare la primitiva  $F: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  della funzione

$$f(x) = \sqrt{x}e^{\sqrt{x}}$$

tale che  $F(4) = 2$ .

[Punteggio: 6 punti]

**Esercizio 6.** Sia  $\{a_n\}_n \subset \mathbb{R}$  una successione a valori non negativi e limitata. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false, giustificando accuratamente le risposte (esibendo, eventualmente, controesempi, anche solo grafici):

1. se  $\{a_n\}_n$  converge a un limite  $L \geq 0$ , allora  $\{a_n\}_n$  è non decrescente;
2. ogni sottosuccessione  $\{a_{n_k}\}_k$  di  $\{a_n\}$  è convergente o oscillante;
3. la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  converge.

[Punteggio: 3 punti]