

Analisi Matematica I – Scritto del 20.01.2021

Tempo a disposizione: 75 minuti

Esercizio 1. Risolvere l'equazione in campo complesso

$$|z + 1| - i|z| = |z + i| - i$$

[Punteggio: 5 punti]

Esercizio 2. Determinare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il carattere della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} (\log(1 + n^3) - 3 \log(n))$$

[Punteggio: 6 punti]

Esercizio 3. Calcolare i limiti, e gli eventuali asintoti, della seguente funzione negli estremi del suo dominio di definizione:

$$f(x) = \begin{cases} x^2(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2}) & x \geq -1, \\ \arctan(x^5(1 - \exp(\frac{1}{x^5}))) & x < -1 \end{cases}$$

[Punteggio: 5 punti]

Esercizio 4. Indicare se la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[4]{x} \sin(x)}{e^{x^2}} & \text{se } x \geq 0, \\ \frac{1 - e^{x^2}}{x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

ha in $x_0 = 0$ un punto di non derivabilità e, in tal caso, classificarlo.

[Punteggio: 5 punti]

Esercizio 5. Calcolare la soluzione del problema di Cauchy \tilde{y}

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{e^{-y^2(x)}}{y(x)} x \arctan(x) \\ y(0) = 1 \end{cases}.$$

[Punteggio: 6 punti]

Esercizio 6. Dimostrare che la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = x^2 - \arctan(x)$$

ha uno zero localizzato nell'intervallo $[\frac{1}{\sqrt{3}}, 1]$.

Per giustificare la risposta, si dovrà invocare un opportuno risultando verificandone l'applicabilità nel contesto del problema dato.

[Punteggio: 3 punti]