

Analisi Matematica I – Scritto del 31.08.2021

Tempo a disposizione: 75 minuti

Esercizio 1. Determinare e rappresentare graficamente il luogo dei punti $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$(z^2 + 4\operatorname{Re}(z)^2 - 8 - \bar{z}^2)(z^3 - i + 1) = 0.$$

[Punteggio: 5 punti]

Esercizio 2. Determinare per quali valori del parametro $\beta \in \mathbb{R}$ si ha la convergenza *assoluta* della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta} \frac{\arctan\left(\frac{1}{n}\right) - \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\log(n+1)}.$$

[Punteggio: 6 punti]

Esercizio 3. Calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - (\cos x)^2}{e^{x^2} - \cos x}.$$

[Punteggio: 5 punti]

Esercizio 4. Calcolare l'integrale

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{3 \cos^2 x + 2 \cos x + 2 \sin^2 x} dx.$$

[Punteggio: 5 punti]

Esercizio 5. Sia \tilde{y} la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{aligned} y'' + 2y' - 3y &= e^x \\ y(0) &= 0, \\ y'(0) &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Calcolare $\tilde{y}(-1)$.

[Punteggio: 6 punti]

Esercizio 6. Sia $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervallo limitato e siano $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando le risposte:

- (a) Se f è continua e g è derivabile, allora la funzione prodotto fg è continua in (a, b) .
- (b) Se f è derivabile e g è limitata, allora la funzione prodotto fg è continua in (a, b) .
- (c) Se fg è continua in (a, b) , allora entrambe le funzioni f e g sono continue in (a, b) .

[Punteggio: 3 punti]