Esercizi svolti sulle
serie numeriche
tratti dai temi
d'esame

ES. 4 - 07/09/2016

Sia $\alpha \geq -1$. La serie

$$\sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{(n+2)! + e^n}{(n! + n^2)\left(n^{\alpha+1} + \arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right)}$$

converge se e solo se . . . .

Serie a termini positivi. Applico criterio confronto asintotico

$$(n+2)! + e^n = (n+2)!\left(1 + \overset{\nearrow 0}{\frac{e^n}{(n+2)!}}\right) \sim (n+2)!$$

Analogamente

$$n! + n^2 = n!\left(1 + \overset{\nearrow 0}{\frac{n^2}{n!}}\right) \sim n!$$

$$n^{\alpha+1} + \arctan\left(\frac{1}{n}\right) \underset{\downarrow}{\sim} n^{\alpha+1} + \frac{1}{n} \sim n^{\alpha+1}$$

uso che $\lim_{t\to 0} \frac{\arctan(t)}{t} = 1$

↳ uso che $\alpha+1 \geq 0$

Quindi, detta $\{a_n\}$ la successione termine generale della serie, ho che

$$a_n \sim \frac{(n+2)!}{n! \cdot n^{\alpha+1}} = \frac{(n+2)(n+1)n!}{n!\, n^{\alpha+1}}$$

$$= \frac{(n+2)(n+1)}{n^{\alpha+1}}$$

$$\sim \frac{n^2}{n^{\alpha+1}}$$

e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^{\alpha+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$ converge se e solo se

$$\alpha - 1 > 1 \iff \alpha > 2$$

Risposta $\boxed{A}$

ES. 4 del 26/03/2018

Sia $\alpha \geq 0$. La serie

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{7^{n^2} + \sqrt{n}}{[\alpha^n + 7^n]^n}$ converge se e solo se

---

Usiamo il criterio asintotico della

radice. (infatti'

$$a_n = \frac{7^{n^2}+\sqrt{n}}{[\alpha^n+7^n]^n}$$ è a termini positivi')

$$\lim_{n\to+\infty} a_n^{1/n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(7^{n^2}\left(1+\overbrace{\frac{\sqrt{n}}{7^{n^2}}}^{\to 0}\right)\right)^{\frac{1}{n}}}{\left([\alpha^n+7^n]^n\right)^{\frac{1}{n}}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{7^n}{\alpha^n+7^n} =$$

$$\begin{cases} \lim_{n\to\infty} \dfrac{7^n}{7^n\left(\underbrace{\left(\frac{\alpha}{7}\right)^n}_{\to 0}+1\right)} = 1 & 0\leq\alpha<7 \\ \lim_{n\to\infty} \dfrac{7^n}{2\cdot 7^n} = \dfrac{1}{2} < 1 & \alpha=7 \\ \lim_{n\to+\infty} \dfrac{7^n}{\alpha^n\left(1+\underbrace{\left(\frac{7}{\alpha}\right)^n}_{\to 0}\right)} = & \alpha>7 \\ = \lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{7}{\alpha}\right)^n = 0 < 1 & \end{cases}$$

Per il criterio asintotico della radice, ho

convergenza per $\alpha \geq 7$.

Per $\alpha < 7$ la serie diverge a $+\infty$:

anche se il criterio è inefficace $(L=1)$,

è sufficiente osservare che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{7^{n^2}+\sqrt{n}}{(7^n+\alpha^n)^n} = 1$$

$\Rightarrow$ non è verificata la condiz. necess.

x la converg.

ES. 3 del 20/01/2011

Per quali $\beta \in \mathbb{R}$ converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{(\beta-1)n^2}$$

Serie a termini positivi - Applico il criterio

asintotico della radice

$$L = \lim_{n \to +\infty} a_n^{\frac{1}{n}} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n^2+1}{n^3}\right)^{1/n} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{(\beta-1)\cdot n}$$

- $$\left(\frac{n^2+1}{n^3}\right)^{1/n} = \exp\left(\frac{1}{n} \log\left(\frac{n^2+1}{n^3}\right)\right)$$

$$\sim \exp\left(\frac{1}{n} \log\left(\frac{1}{n}\right)\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} e^0 = 1$$

(Ricordo $\lim_{x \to 0^+} x^\alpha \log^\beta(x) = 0$)
$\forall \alpha > 0 \; \forall \beta \in \mathbb{R}$

- $$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{(\beta-1)\cdot n} \to e^{\beta-1}$$

Quindi $L = e^{\beta-1} < 1 \iff \beta-1<0 \iff \beta < 1$

Per $\beta > 1$, $L > 1 \Rightarrow$ la serie diverge

Per $\beta = 1$ la serie si riduce a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3}\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$ serie armonica diverg.

Ho convergenza $\iff \beta < 1$

Risposta $\boxed{D}$

ES 4 del 14/01/2016

Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha convergenza di

$$\sum_{n=7}^{\infty} \frac{n^2+n!+\cos(n^n)}{(n+1)^n+\sin\left(\frac{\alpha}{n+1}\right)+e^{2n}}$$

Serie a termini positivi (per n sufficientem. grande).

Applico CRITERIO del confronto asintotico

$$n^2+n!+\cos(n^n) = n!\left(\overset{\to 0}{\frac{n^2}{n!}} + 1 + \overset{\to 0}{\frac{\cos(n^n)}{n!}}\right)$$

$$\sim n!$$

$$(n+1)^n + \sin\left(\frac{\alpha}{n+1}\right) + e^{2n} =$$

$$= (n+1)^n\left(1 + \underbrace{\sin\left(\frac{\alpha}{n+1}\right)(n+1)^{-n}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{e^{2n}}{(n+1)^n}}_{\to 0}\right)$$

$$\sim (n+1)^n$$

Quindi $a_n \sim \dfrac{n!}{(n+1)^n}$

N.B. Questo confronto è valido $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

Ora studio $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(n+1)^n}$ tramite il asintotico del rapporto.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!}{(n+2)^{n+1}} \cdot \frac{(n+1)^n}{n!} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)\cdot(n+1)^n}{(n+2)^{n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \exp\left((n+1)\log\left(\frac{n+2}{n+1}\right)(-1)\right) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \exp\left(-(n+1)\log\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \exp\left(-\frac{(n+1)}{n+1}\right) = e^{-1} < 1$$

→ ok convergenza. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

Risposta $\boxed{C}$

ES. 4 del 14|01|2019

Per quali $\alpha \geq 0$ si ha convergenza di

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left(\alpha^n + \log(n)\right)\left(1+\cos^2(3n)\right)}{\left(7^n+1\right)\left(n^2-\log(n)\right)}$$

Notare che la serie è a termini positivi

Uso il criterio asintotico del confronto.

$$a_n \sim \frac{\left(\alpha^n + \log(n)\right)\left(1+\cos^2(3n)\right)}{7^n n^2}$$

Ora distinguo 3 casi

$\underline{0 \leq \alpha < 1} \Rightarrow \alpha^n \to 0.$

e quindi $a_n \sim \frac{\log(n)\left(1+\cos^2(3n)\right)}{7^n n^2} =: b_n.$

$$b_n \leq \frac{\log(n)(1+1)}{7^n n^2} = \frac{2\log(n)}{n^2\, 7^n}$$ che converge

per criterio asintotico della radice,
per esempio

$\underline{\alpha = 1} \Rightarrow \alpha^n = 1$

$$a_n \sim \frac{\log(n)\,(1+\cos^2(3n))}{n^2\, 7^n}$$ e idem

$\underline{\alpha > 1} \Rightarrow \alpha^n \to +\infty$ più velocem. di $\log(n)$

3 CASI

- $1 < \alpha < 7$

$$a_n \sim \frac{\alpha^n\,(1+\cos^2(3n))}{7^n\, n^2} =$$

$$= \left(\frac{\alpha}{7}\right)^n \frac{1+\cos^2(3n)}{n^2} =: c_n$$

$$c_n \leq \frac{2}{n^2}\left(\frac{\alpha}{7}\right)^n$$ che converge (per es. con criterio asintotico radice)

- $\alpha = 7$

$$a_n \sim \frac{7^n\,(1+\cos^2(3n))}{7^n\, n^2} =: d_n$$

$$d_n \leq \frac{2}{n^2}$$ ok, serie armonica convergente

- $\alpha > 7$

$$a_n \sim \left(\frac{\alpha}{7}\right)^n \frac{(1+\cos^2(3n))}{n^2} \geq \underbrace{\left(\frac{\alpha}{7}\right)^n \frac{1}{n^2}}_{\text{e questa serie diverge}}$$

$\Rightarrow \sum a_n$ diverge.

Quindi la convergenza $\Leftrightarrow \alpha \leq 7$.

Risposta $\boxed{B}$

ES. 5 del 10/01/2013

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{|\beta-7|} \sin\left(\sqrt{n^4+1}-n^2\right)$$

converge se e solo se

～ ∘ ～

$$\sqrt{n^4+1}-n^2 = \frac{n^4+1-n^4}{\sqrt{n^4+1}+n^2} \sim \frac{1}{2n^2}$$

per $n \to +\infty$

Quindi,

$$\sin\left(\sqrt{n^4+1}-n^2\right) \sim \sin\left(\frac{1}{2n^2}\right)$$

e per n sufficientem. grande il seno è positivo – La serie è a termini positivi. Uso il criterio del confronto asintotico

$$a_n = n^{|\beta-7|} \sin\left(\sqrt{n^4+1} - n^2\right)$$

$$\sim n^{|\beta-7|} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\sim \frac{n^{|\beta-7)}}{n^2} = \frac{1}{n^{2-|\beta-7|}}$$

Serie armonica generalizzata che converge se e solo se $2-|\beta-7| > 1$ cioè

$$|\beta-7| < 1 \Leftrightarrow$$

$$6 < \beta < 8$$

Risposta $\boxed{C}$