Serie

Telescopiche

ES. 43

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)}_{S_1} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)}_{S_2}\right)$$

$$S_1 = 1 - \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 1$$

(infatti 1 è il primo elem. della successione)

$$S_2 = \frac{1}{2} - \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2}$$

infatti $\frac{1}{2}$ è il primo elem. della successione $1/_{n+1}$, $n \geq 1$

$\Rightarrow$ La somma della serie quindi è

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{4}$$

ES. 4.4

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}\right]=b_1-\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n!}$$

$$=\frac{1}{1!}=1$$

ES. 4.5

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(n+1)\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)-n\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n(n+1)}$$

Ricordo che $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\cos(\alpha)$

e quindi $\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(n\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)=$

$$= \cos\left((n-1)\pi/2\right).$$

Pertanto la serie si riscrive come

$$\sum_{n=3}^{\infty} \left[\frac{(n+1)\cos\left((n-1)\pi/2\right)}{n\cdot(n+1)} - \frac{n\cdot\cos\left(n\pi/2\right)}{n\,(n+1)} \right]$$

$$= \sum_{n=3}^{\infty} \left[\frac{\cos\left((n-1)\pi/2\right)}{n} - \frac{\cos\left(n\pi/2\right)}{n+1} \right]$$

cioè è in forma telescopica

$$\sum (b_n - b_{n+1}) \quad \text{con} \quad b_n = \frac{\cos\left((n-1)\pi/2\right)}{n}$$

Quindi la somma della serie è

$$S = b_3 - \lim_{n\to+\infty} b_n =$$

$$= \frac{\cos\left(2\pi/2\right)}{3} - \lim_{n\to+\infty} \frac{\cos\left((n-1)\pi/2\right)}{n}$$

$$= -\frac{1}{3} - 0 = -1/3$$

ES. 46

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{n+1}{n}\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\log(n+1) - \log(n)\right] =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \log(n) - \log(1) = +\infty$$